

Medelvärkets fördelning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Summor av normalfördelade stokastiska variabler

Medelvärdet av n oberoende observationer från samma normalfördelning är självt normalfördelat, med samma väntevärde men med standardavvikelsen delad med $\sqrt{n}$. Resultatet är grunden för nästan all inferens om väntevärden.

1. Summa och medelvärde av likafördelade variabler

Låt $\xi_1, \dots, \xi_n$ vara oberoende och alla $N(\mu, \sigma)$. Med $a_i = 1$ respektive $a_i = 1/n$ i satsen om **summor av normalfördelade variabler** får vi

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \in N(n\mu, \sigma\sqrt{n}), \quad \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

2. Kvadratroten

 **Spridningen växer som $\sqrt{n}$, inte som n**

Summan av n oberoende variabler har standardavvikelsen $\sigma\sqrt{n}$, medan n gånger **samma** variabel, $n\xi_1$, har standardavvikelsen $n\sigma$. Oberoende fel tar delvis ut varandra, identiska fel gör det inte.

För medelvärdet betyder det att standardavvikelsen $\sigma/\sqrt{n}$ krymper när n växer — men långsamt: fyra gånger så många mätningar halverar spridningen.

Samma jämförelse gjordes med byggelementen i **Linjära funktioner av stokastiska variabler**: fem element valda på måfå gav mindre spridning i totallängden än ett element kopierat fem gånger.

3. När ξ_i inte är normalfördelade

Väntevärdet och standardavvikelsen

$$E(\bar{\xi}) = \mu, \quad V(\bar{\xi}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

gäller för **alla** fördelningar, så länge variablerna är oberoende och har samma μ och σ .

Normalfördelningen är däremot exakt bara om ξ_i är normalfördelade. Annars ger **Centrala gränsvärdessatsen** att $\bar{\xi}$ är approximativt normalfördelad när n är stort.

Varför det spelar roll för inferens

$\bar{\xi}$ är den naturliga **punktskattningen** av μ . Att vi känner dess fördelning, $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, är det som gör det möjligt att bygga **konfidensintervall** och test för μ .

Vanliga fel

- **Glömma roten.** $D(\bar{\xi}) = \sigma/\sqrt{n}$, inte σ/n .
- **Summa eller medelvärde.** Summan har $D = \sigma\sqrt{n}$, medelvärdet $\sigma/\sqrt{n}$. Läs vilken storhet frågan gäller.
- $\xi_1 + \dots + \xi_n$ är inte $n\xi_1$. n oberoende mätningar har variansen $n\sigma^2$; en mätning gånger n har $n^2\sigma^2$.

4. Lösta lektionsuppgifter

Lektion 9, övning 6 – Störda kunder under 14 dagar

Ett telemarketingföretag har kommit fram till att andelen störda kunder en godtyckligt vald dag kan beskrivas av en normalfördelning med väntevärde 55 procent och standardavvikelse 8 procent. Vad är sannolikheten att den genomsnittliga andelen störda kunder under en 14-dagarsperiod överstiger 58 procent?

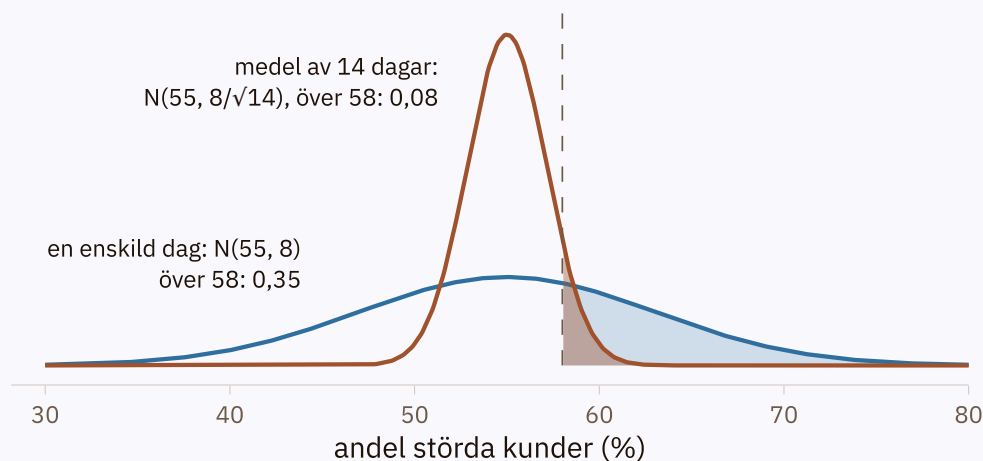
Lösning

Låt ξ_i = andelen störda dag i , $i = 1, \dots, 14$, oberoende och $N(55, 8)$. Medelvärdet:

$$\bar{\xi} \in N(55, \frac{8}{\sqrt{14}}) = N(55; 2,138)$$

$$P(\bar{\xi} > 58) = 1 - \Phi\left(\frac{58 - 55}{2,138}\right) = 1 - \Phi(1,40) \approx \boxed{0,081}$$

Medelvärdet sprider mindre, så svansen över 58 krymper



Jämförelse. En enskild dag är $P(\xi_i > 58) = 1 - \Phi(3/8) \approx 0,35$. Genomsnittet över 14 dagar sprider mycket mindre, så det är betydligt ovanligare att det hamnar över 58.

På räknaren. `normcdf(58,∞,55,8/√(14))`.

Facit: 0,081 (tabell med z avrundat; utan avrundning 0,080). Antagandet om oberoende mellan dagarna står inte i uppgiften men krävs.

≡ Lektion 9, övning 9 (Vännman 6.14) – Kex i en förpackning

Tjockleken hos ett kex är $N(0,4; 0,05)$ cm, oberoende mellan kexen. En förpackning rymmer en stapel på 12 cm.

a) Vad är sannolikheten att minst 28 kex får plats?

b) Vad är sannolikheten att minst 30 kex får plats?

 Lösning

Låt ξ_k = tjockleken hos kex nummer k , $\xi_k \in N(0,4; 0,05)$, oberoende. Minst n kex får plats om de n första tillsammans är högst 12 cm.

a) $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_{28}$:

$$\xi \in N(28 \cdot 0,4, 0,05\sqrt{28}) = N(11,2; 0,265)$$

$$P(\xi \leq 12) = \Phi\left(\frac{12 - 11,2}{0,265}\right) = \Phi(3,02) \approx \boxed{0,9987}$$

b) $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_{30} \in N(12; 0,05\sqrt{30})$, och 12 cm är precis väntevärdet:

$$P(\xi \leq 12) = \Phi(0) = \boxed{0,5}$$

Uppgiften (Vännman 6.14) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och svaren stämmer med det.

Se även

- [Summor av normalfördelade stokastiska variabler](#)
- [Centrala gränsvärdessatsen](#)
- [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#)
- [Punktskattning](#)
- [Konfidsensintervall](#)

Resurser

- [Khan Academy: Sampling distribution of the sample mean](#)
- [Wikipedia: Standard error](#)