

Max och min av stokastiska variabler

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #metod

Kurs: S0008M Förkunskaper: Fördelningsfunktion, Oberoende stokastiska variabler

Det minsta och det största värdet av flera oberoende stokastiska variabler har enkla fördelningsfunktioner: $1 - (1 - F)^n$ respektive F^n . De beskriver till exempel livslängden hos en serie- respektive parallellkopplad krets.

1. Seriekoppling och parallellkoppling

Låt $\xi_1, \dots, \xi_n$ vara livslängderna hos n komponenter som går sönder oberoende av varandra.

- **Seriekopplad** krets fungerar tills *någon* komponent går sönder: livslängden är $\min(\xi_1, \dots, \xi_n)$.
- **Parallellkopplad** krets fungerar tills *alla* komponenter har gått sönder: livslängden är $\max(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Samma idé som för **serie- och parallellsystem** av händelser, men nu med tiden som stokastisk variabel.

2. Största värdet

$\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq x$ inträffar precis när **alla** $\xi_i \leq x$. Med oberoende blir sannolikheten en produkt:

$$F_{\max}(x) = P(\xi_1 \leq x) \cdots P(\xi_n \leq x)$$

och är variablerna dessutom likafördelade med fördelningsfunktionen F :

$$F_{\max}(x) = (F(x))^n$$

3. Minsta värdet

För minimum är det lättare att räkna med komplementet: $\min(\xi_1, \dots, \xi_n) > x$ inträffar precis när **alla** $\xi_i > x$. Alltså

$$P(\min > x) = (1 - F(x))^n, \quad \text{så} \quad \boxed{F_{\min}(x) = 1 - (1 - F(x))^n}$$

Minimum av exponentialfördelningar

Är $\xi_i \in \text{Exp}(\lambda)$ är $P(\xi_i > x) = e^{-\lambda x}$, och

$$P(\min > x) = (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x}$$

Minimum är alltså självt **exponentialfördelat**, $\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \text{Exp}(n\lambda)$, med väntevärdet $\frac{1}{n\lambda}$. En seriekopplad krets med n komponenter håller i genomsnitt n gånger kortare tid än en enskild komponent.

Maximum av exponentialfördelningar är däremot ingen fördelning vi känner igen; med två komponenter och $\lambda = 1$ är $F_{\max}(x) = (1 - e^{-x})^2$.

Frekvensfunktionerna får vi genom derivering, som i **fördelningsfunktionsmetoden**.

4. Lösta lektionsuppgifter

Övningarna märkta *Kompendiet* kommer ur kompendiet om flerdimensionella fördelningar. Det saknar facit, så de är lösta två gånger oberoende av varandra.

Lektion 19, övning 2 – Serie- och parallellkopplad krets

En krets byggs av tio komponenter vars livslängder är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 100 timmar. Seriekopplad fungerar kretsen tills någon komponent går sönder; parallellkopplad tills alla har gått sönder.

a) Bestäm sannolikheten att kretsen fungerar i minst 150 timmar om komponenterna parallellkopplas.

b) Bestäm sannolikheten att kretsen fungerar i minst 150 timmar om komponenterna seriekopplas. Bestäm även fördelningen för ζ = tiden då kretsen slutar fungera. Känner du igen fördelningen?

Lösning

Väntevärdet 100 timmar ger $\lambda = 1/100 = 0,01$, och för en komponent är

$$P(\xi_i > 150) = e^{-0,01 \cdot 150} = e^{-1,5} \approx 0,2231$$

a) Parallellkopplad krets går sönder före 150 timmar bara om alla tio gör det:

$$P(\max > 150) = 1 - (1 - e^{-1,5})^{10} = 1 - 0,7769^{10} \approx \boxed{0,92}$$

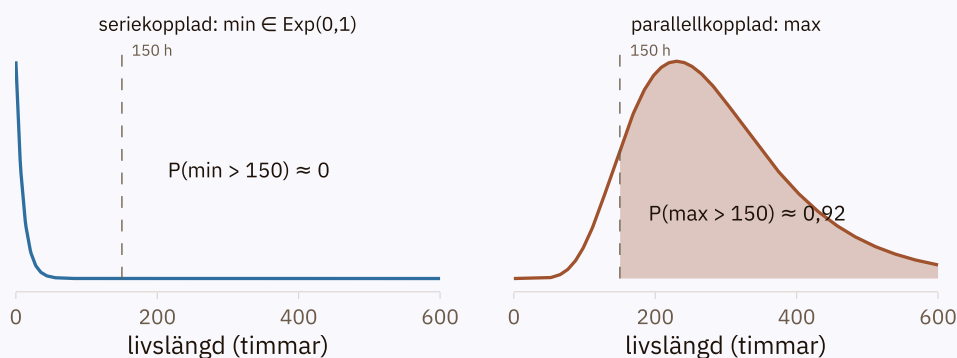
b) Seriekopplad krets kräver att alla tio håller:

$$P(\min > 150) = (e^{-1,5})^{10} = e^{-15} \approx \boxed{3 \cdot 10^{-7} \approx 0}$$

Fördelningen för $\zeta = \min(\xi_1, \dots, \xi_{10})$: $P(\zeta > z) = e^{-10 \cdot 0,01 z} = e^{-0,1z}$ för $z > 0$, alltså

$$\boxed{\zeta \in \text{Exp}(0,1)}$$

en exponentialfördelning med väntevärde 10 timmar.



Figuren visar livslängdens frekvensfunktion för de två kopplingarna. Den seriekopplade kretsen är nästan säkert trasig långt före 150 timmar, medan den parallellkopplade oftast håller betydligt längre.

På räknaren. a) $1 - (1 - e^{(-1.5)})^{10}$, b) $e^{(-15)}$.

Facit: a) parallellkoppling, sannolikheten 0,92; b) seriekoppling, sannolikheten ≈ 0 , $\zeta \in \text{Exp}(0,1)$.

≡ Kompendiet, övning 2.1 – Fem seriekopplade komponenter

Beräkna den förväntade livslängden för en krets av 5 seriekopplade komponenter vars livslängder är oberoende och exponentialfördelade med väntevärdet 10 timmar.

Lösning

Varje komponent har $\lambda = 1/10$. Kretsens livslängd är minimum av fem, och enligt rutan i avsnitt 3 är $\min \in \text{Exp}(5 \cdot \frac{1}{10}) = \text{Exp}(0,5)$:

$$E(\min) = \frac{1}{0,5} = \boxed{2 \text{ timmar}}$$

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 2.2 – Agnes längsta väntetid

Agnes tar tunnelbanan till jobbet. Tågen går med 10 minuters intervall, men hon har varken tidtabell eller klocka, så hon betraktar väntetiderna olika dagar som oberoende stokastiska variabler. Beräkna sannolikheten att hennes längsta väntetid under en 10-dagarsperiod blir större än 8 minuter.

Lösning

Modell. Utan klocka kommer hon till perrongen vid en slumpmässig tidpunkt, så väntetiden $\xi_i \in R(0, 10)$ med $F(x) = x/10$ på $[0, 10]$, oberoende för $i = 1, \dots, 10$.

Största värdet. $\max \leq 8$ kräver att alla tio väntetider är högst 8:

$$P(\max > 8) = 1 - F(8)^{10} = 1 - 0,8^{10} \approx \boxed{0,89}$$

En enskild dag är $P(\xi_i > 8) = 0,2$ liten, men på tio dagar är det nästan säkert att det händer minst en gång.

På räknaren. $1 - 0.8^{10}$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 2.3 – Väntevärde och varians för ett maximum

Låt $\xi_1, \dots, \xi_{10}$ vara oberoende och $R(0, b)$ -fördelade, och $\zeta = \max(\xi_1, \dots, \xi_{10})$. Beräkna $E(\zeta)$ och $V(\zeta)$.

Lösning

Fördelningen. $F(x) = x/b$ på $[0, b]$, så enligt avsnitt 2

$$F_{\zeta}(z) = \left(\frac{z}{b}\right)^{10}, \quad f_{\zeta}(z) = \frac{10z^9}{b^{10}}, \quad 0 \leq z \leq b$$

Väntevärdet.

$$E(\zeta) = \int_0^b z \cdot \frac{10z^9}{b^{10}} dz = \frac{10}{11} b, \quad E(\zeta^2) = \int_0^b z^2 \cdot \frac{10z^9}{b^{10}} dz = \frac{10}{12} b^2$$

$$E(\zeta) = \frac{10}{11} b \approx 0,909 b$$

Variansen.

$$V(\zeta) = \frac{10}{12} b^2 - \left(\frac{10}{11} b\right)^2 = \frac{5}{726} b^2 \approx 0,0069 b^2$$

Standardavvikelsen är $\approx 0,083 b$: med tio observationer hamnar det största värdet nästan alltid nära b . Därför kan $\frac{11}{10} \max(\xi_i)$ användas som **skattning** av en okänd övre gräns b .

På räknaren. $\int (z \cdot 10 \cdot z^9 / b^{10}, z, 0, b)$ med b odefinierad ger $10 \cdot b / 11$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler
- Exponentialfördelning
- Oberoende händelser
- Fördelningsfunktion
- Oberoende stokastiska variabler

Resurser

- [Wikipedia: Order statistic](#)