

Marginalfördelning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Flerdimensionella fördelningar

Marginalfördelningen är fördelningen för en av variablerna i en flerdimensionell fördelning, betraktad för sig. Den fås genom att summera eller integrera bort den andra variabeln.

1. Diskret fall

Om $p(x, y)$ är den simultana sannolikhetsfunktionen för (ξ, η) ges marginalfördelningarna av

$$p_{\xi}(x) = \sum_y p(x, y), \quad p_{\eta}(y) = \sum_x p(x, y)$$

där summorna tas över alla värden som η respektive ξ kan anta.

Att $\xi = x$ inträffar är detsamma som att (ξ, η) hamnar på raden x i tabellen, oavsett vilket y . Raderna är disjunkta händelser, så sannolikheterna adderas — det är **lagen om total sannolikhet** i tabellform.

Summera raderna och kolumnerna

Skriv den simultana tabellen och lägg till en summakolumn och en summarad. Radsummorna är $p_{\xi}(x)$, kolumnsummorna $p_{\eta}(y)$ — därav namnet: de står i *marginalen*. Båda ska summera till 1.

	$y = 3$	$y = 4$	$y = 5$	$p_{\xi}(x)$
$x = 3$	0,31	0,11	0,05	0,47
$x = 4$	0,02	0,22	0,12	0,36
$x = 5$	0,01	0,03	0,13	0,17
$p_{\eta}(y)$	0,34	0,36	0,30	1

Den simultana tabellen från lektion 17, övning 1a (nedan) med radsummorna $p_{\xi}(x)$ och kolumnsummorna $p_{\eta}(y)$ i marginalen. Mörkare ruta betyder större sannolikhet.

2. Kontinuerligt fall

Med den simultana frekvensfunktionen $f(x, y)$ ersätts summorna med integraler:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

För fixt x integrerar vi längs den lodräta linjen genom x . Integrationsgränserna bestäms av var $f(x, y)$ är skild från noll för det x -värdet, och det är där de flesta fel görs.

⚠ Gränserna beror på x

Är (ξ, η) likformigt fördelad på en cirkelskiva med radie 1 går y från $-\sqrt{1-x^2}$ till $\sqrt{1-x^2}$ för ett givet x . Marginalen blir då $f_{\xi}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$, en halvcirkel och inte en konstant – trots att den simultana fördelningen är likformig.

3. Marginalerna räcker inte

Marginalfördelningarna beskriver varje variabel för sig men säger ingenting om hur de beror av varandra. Olika simultana fördelningar kan ha exakt samma marginaler. Bara om ξ och η är oberoende går det att återskapa den simultana fördelningen, som produkten $p(x, y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$.

Hur mycket den ena variabeln säger om den andra fångas i stället av den **betingade fördelningen** och av **korrelationen**.

Vanliga fel

- **Integrerat över fel variabel.** $f_\xi(x)$ fås genom att integrera bort y ; svaret får bara innehålla x .
- **Stödmängden saknas.** Ange för vilka x marginalen gäller, och att den är 0 utanför.
- **Produkten av marginalerna som simultan fördelning.** $p_\xi(x)p_\eta(y)$ är den simultana fördelningen bara vid oberoende.
- **Ingen kontroll.** Marginalen ska summera eller integrera till 1 — ett snabbt sätt att hitta fel gränser.

4. Lösta lektionsuppgifter

Övningarna märkta *Kompendiet* kommer ur kompendiet om flerdimensionella fördelningar. Det saknar facit, så de är lösta två gånger oberoende av varandra.

Lektion 17, övning 1a — Joels och Majas betyg

Joel och Maja har pluggat tillsammans inför en tenta för överbetyg. Låt ξ och η vara betyget för Joel respektive Maja. Den simultana sannolikhetsfunktionen för (ξ, η) är

$x \backslash y$	3	4	5
3	0,31	0,11	0,05
4	0,02	0,22	0,12
5	0,01	0,03	0,13

Bestäm marginalfördelningarna för ξ och η . Bestäm även väntevärde och standardavvikelse för Majas betyg.

 Lösning

Marginalerna. Radsummor ger Joels betyg, kolumnsummor Majas:

$x \backslash y$	3	4	5	$p_{\xi}(x)$
3	0,31	0,11	0,05	0,47
4	0,02	0,22	0,12	0,36
5	0,01	0,03	0,13	0,17
$p_{\eta}(y)$	0,34	0,36	0,30	1

Majas väntevärde.

$$E(\eta) = 3 \cdot 0,34 + 4 \cdot 0,36 + 5 \cdot 0,30 = \boxed{3,96}$$

Majas standardavvikelse. $E(\eta^2) = 9 \cdot 0,34 + 16 \cdot 0,36 + 25 \cdot 0,30 = 16,32$, så

$$V(\eta) = 16,32 - 3,96^2 = 0,6384, \quad \sigma_{\eta} = \sqrt{0,6384} \approx \boxed{0,799}$$

På räknaren. Lägg betygen 3, 4, 5 i en lista och sannolikheterna $\{0,34, 0,36, 0,30\}$ i en annan. Kör **menu** → **Statistics** → **Stat Calculations** → **One-Variable Statistics** med sannolikhetslistan som **Frequency List**. Då är $\bar{x} = E(\eta)$ och $\sigma_x = \sigma_{\eta}$ – ta σ_x , inte s_x , eftersom vi har hela fördelningen och inte ett stickprov.

Facit: $P(\xi = x) = 0,47; 0,36; 0,17$ och $P(\eta = y) = 0,34; 0,36; 0,30$ för $x, y = 3, 4, 5$; $E(\eta) = 3,96, \sigma = 0,799$.

Kompendiet, övning 1.2 – Likformig fördelning på kvadraten

Låt (ξ, η) vara likformigt fördelad på $K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Beräkna marginalfördelningarna för ξ och η direkt från definitionen.

 Lösning

Simultan frekvensfunktion. $|K| = 1$, så $f(x, y) = 1$ på K och 0 utanför.

Marginalen för ξ . För ett fixt x mellan 0 och 1 är $f(x, y) = 1$ precis när $0 \leq y \leq 1$:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 1 dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

och $f_{\xi}(x) = 0$ för övriga x , eftersom hela den lodräta linjen då ligger utanför K . Alltså $\xi \in R(0, 1)$.

Marginalen för η . Samma räkning med rollerna ombytta ger $\eta \in R(0, 1)$.

Kommentar. Här är $f(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$ överallt, så ξ och η är oberoende. Det är omvändningen till [lektion 17, övning 3 a](#)). Jämför med cirkelskivan i varningen ovan: där är marginalerna inte likformiga, och variablerna är beroende.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- [Flerdimensionella fördelningar](#)
- [Betingad fördelning och betingat väntevärde](#)
- [Lagen om total sannolikhet](#)
- [Sannolikhetsfunktion](#)
- [Frekvensfunktion](#)

Resurser

- [Wikipedia: Marginal distribution](#)