

Linjära funktioner av stokastiska variabler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Väntevärde, Varians och standardavvikelse, Oberoende stokastiska variabler

Väntevärdet är linjärt, så $E(a\xi + b\eta + c) = aE(\xi) + bE(\eta) + c$ gäller alltid. Variansen är det inte – för oberoende variabler gäller $V(a\xi + b\eta) = a^2V(\xi) + b^2V(\eta)$, alltså adderas varianserna men med kvadrerade koefficienter.

1. En variabel: $a\xi + b$

För konstanter a och b gäller

$$E(a\xi + b) = aE(\xi) + b, \quad V(a\xi + b) = a^2 V(\xi)$$

och därmed $\sigma_{a\xi+b} = |a| \sigma_\xi$.

Att lägga till b flyttar hela fördelningen utan att ändra spridningen. Att multiplicera med a skalar avstånden, och eftersom variansen är ett kvadratisk mått skalas den med a^2 .

2. Summor: Sats 5.1

För stokastiska variabler $\xi_1, \dots, \xi_n$ och konstanter $c_1, \dots, c_n$ gäller

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(\xi_i)$$

alltid, och om variablerna är oberoende

$$V\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 V(\xi_i)$$

⚠ Varianser adderas — standardavvikelser gör det inte

$\sigma_{\xi_1 + \xi_2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, inte $\sigma_1 + \sigma_2$. Och vid en *differens* adderas varianserna också, eftersom $c = -1$ ger $c^2 = 1$:

$$V(\xi_1 - \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2)$$

Är variablerna beroende gäller väntevärdesregeln fortfarande, men variansen får en extra term med **kovariansen**.

3. Medelvärde av oberoende likafördelade

Ett viktigt specialfall: $\xi_1, \dots, \xi_n$ oberoende och likafördelade med väntevärde μ och standardavvikelse σ . För summan och medelvärdet $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum \xi_i$ ger Sats 5.1

$$E\left(\sum \xi_i\right) = n\mu, \quad V\left(\sum \xi_i\right) = n\sigma^2, \quad E(\bar{\xi}) = \mu, \quad V(\bar{\xi}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Summans standardavvikelse växer bara som $\sqrt{n}$, och medelvärdets krymper som $\sigma/\sqrt{n}$. Det är skälet till att upprepade mätningar lönar sig — se **Medelvärdets fördelning**.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 8, övning 4 — Försök i två etapper

Ett vetenskapligt försök består av två etapper, där den andra inte kan påbörjas förrän den första är klar. Låt ξ_1 och ξ_2 vara tiden (minuter) för respektive etapp, och anta att de är oberoende med $E(\xi_1) = 120$, $V(\xi_1) = 36$, $E(\xi_2) = 250$ och $V(\xi_2) = 121$. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för den totala tiden $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Diskutera hur resultatet kan förändras om variablerna är beroende.

Lösning

Väntevärde. Gäller alltid:

$$E(\xi) = E(\xi_1) + E(\xi_2) = 120 + 250 = \boxed{370 \text{ min}}$$

Varians och standardavvikelse. Oberoendet ger

$$V(\xi) = V(\xi_1) + V(\xi_2) = 36 + 121 = 157, \quad \sigma_\xi = \sqrt{157} \approx \boxed{12,53 \text{ min}}$$

Om de är beroende. Väntevärdet ändras inte. Variansen kan däremot ändras mycket. Två extremfall: om ξ_2 alltid är en exakt kopia av ξ_1 blir $V(\xi_1 + \xi_1) = V(2\xi_1) = 4V(\xi_1)$, och om de tar ut varandra helt, som $\xi_1 - \xi_1 = 0$, blir variansen 0.

Facit: $E(\xi) = 370$, $\sigma = 12,53$. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 8, övning 5 – Fem byggelement

Vid tillverkning av byggelement varierar längden, och längderna kan betraktas som oberoende likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 1 m och standardavvikelse 0,005 m. Vi vill ta ut fem element som ska bli 5 meter sammanlagt.

Metod 1: välj ett element på måfå och slipa till fyra andra så att de blir exakt lika långa som det första.

Metod 2: ta fem element på måfå.

Vilken metod är bäst, i meningen att standardavvikelsen för den totala längden är minst? Slipningen antas exakt. Varför vill vi ha liten standardavvikelse, och är resultatet intuitivt rimligt?

Lösning

Beteckningar. ξ_k = längden (m) av element nummer k , $k = 1, \dots, 5$, oberoende med $E(\xi_k) = 1$ och $\sigma = 0,005$. Låt ξ vara den totala längden.

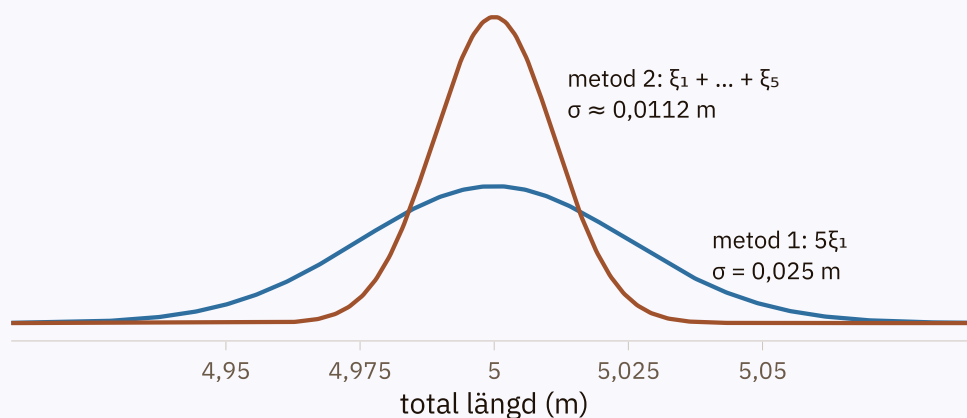
Metod 1. Alla fem blir lika långa som det första, så $\xi = 5\xi_1$:

$$E(\xi) = 5, \quad V(\xi) = 25 V(\xi_1) = 25 \cdot 0,005^2 = 0,000625, \quad \sigma_\xi = 5\sigma = 0,025 \text{ m}$$

Metod 2. $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$ med oberoende termer:

$$E(\xi) = 5, \quad V(\xi) = 5 V(\xi_1) = 0,000125, \quad \sigma_\xi = \sqrt{5} \sigma \approx 0,011 \text{ m}$$

Samma väntevärde 5 m, men metod 2 sprider mindre



Svar. **Metod 2** ger minst standardavvikelse. Båda metoderna träffar 5 m i genomsnitt, men liten standardavvikelse betyder att den verkliga längden sällan hamnar långt ifrån.

Rimlighet. Med metod 1 upprepas det första elementets fel fem gånger. Med metod 2 är felet oberoende, så de tar delvis ut varandra: ett för långt element kompenseras ofta av ett för kort.

Facit: metod 2, eftersom $V(\xi_1 + \dots + \xi_5) = 0,000125 < 0,000625 = V(5\xi_1)$. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Se även

- Väntevärde
- Varians och standardavvikelse
- Oberoende stokastiska variabler
- Summor av normalfördelade stokastiska variabler
- Medelvärdets fördelning
- Kovarians

Resurser

- [Khan Academy: Combining random variables](#)
- [Wikipedia: Variance — sum of uncorrelated variables](#)

