Linjära avbildningar

Apr 28, 2026, 6 min read

#linjär-algebra #linjär-avbildning #matris

> **Kapitel:** 1.8–1.9 · **Ämne:** Linjär algebra **Förkunskaper:** Matrisinvers, Matriser

---

1. Utökad sats för inverterbara matriser

Sats (TFAE för $n \times n$ matris)

Följande är ekvivalenta:

1. A är inverterbar
2. $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har lösning för varje $\vec{b}$
4. $A\vec{x} = \vec{b}$ har **precis en** lösning för varje $\vec{b}$

Höger- och vänsterinvers

För $n \times n$ matriser A, B, C:

- $AC = I \Rightarrow A^{-1} = C$ (högerinvers)
- $BA = I \Rightarrow A^{-1} = B$ (vänsterinvers)

---

2. Linjära avbildningar

> 3B1B: Linear transformations and matrices

2.1 Definition

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en **linjär avbildning** om:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{T} A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

Vi skriver $T = T_A$ där $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

2.2 Egenskaper

Egenskap	Definition
Additiv	$T_A(\vec{x} + \vec{y}) = T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$
Homogen	$T_A(c\vec{x}) = cT_A(\vec{x})$
Linjär	$T_A(c\vec{x} + d\vec{y}) = cT(\vec{x}) + dT(\vec{y})$

---

3. Fundamental sats

3.1 Sats

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en matrisavbildning (dvs. $T = T_A$ för någon matris A) om och endast om:

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ (additiv)
2. $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$ (homogen)

$$\boxed{\text{Linjär} \iff \text{Matrisavbildning}}$$

3.2 Sats: Unikhet

Om $T_A(\vec{x}) = T_B(\vec{x})$ för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, då är $A = B$.

---

4. Standardbasvektorer och standardmatrisen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition: Standardmatrisen för en linjär avbildning T är:

$$\boxed{A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad T(\vec{e}_n)]}$$

där $\vec{e}_i$ är standardbasvektorerna.

Bestäm standardmatrisen

5. Två typer av uppgifter

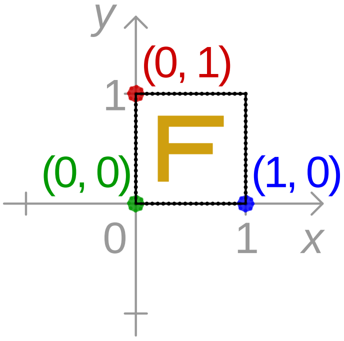
Fråga	Beskrivning
”På vad avbildas $\vec{v}$?”	Beräkna $T(\vec{v}) = A\vec{v}$
“Vad avbildas på $\vec{w}$?”	Lös $A\vec{x} = \vec{w}$

6. Linjära operatorer i $\mathbb{R}^2$

> 3B1B: Linear transformations · interaktiv GeoGebra

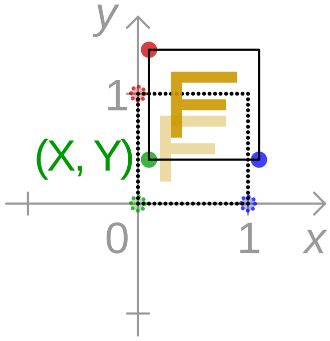
No change

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



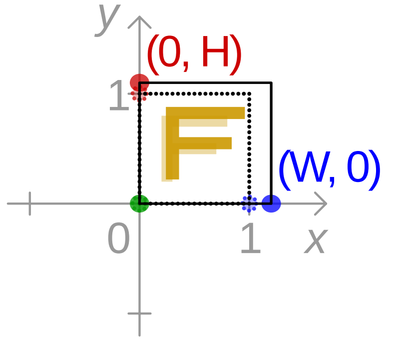
Translate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



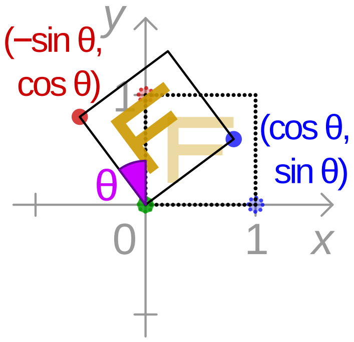
Scale about origin

$$\begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



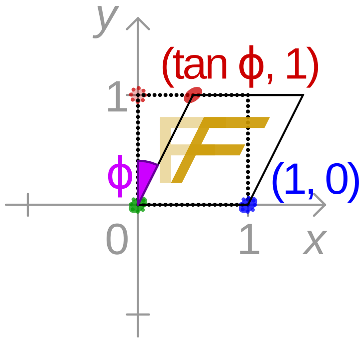
Rotate about origin

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



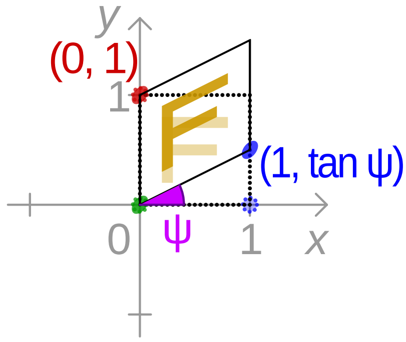
Shear in x direction

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



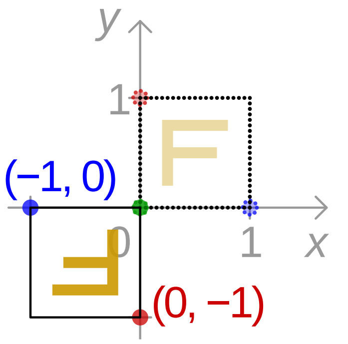
Shear in y direction

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



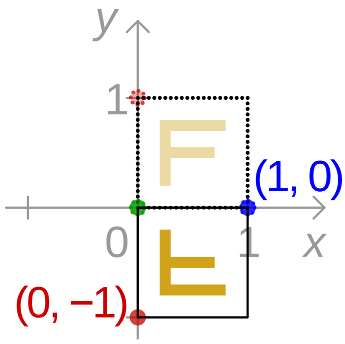
Reflect about origin

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



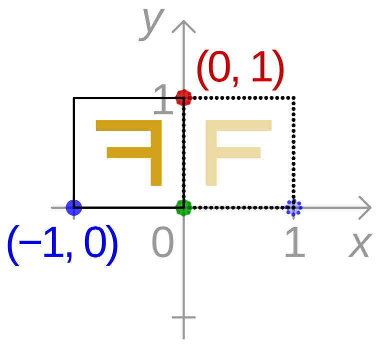
Reflect about x-axis

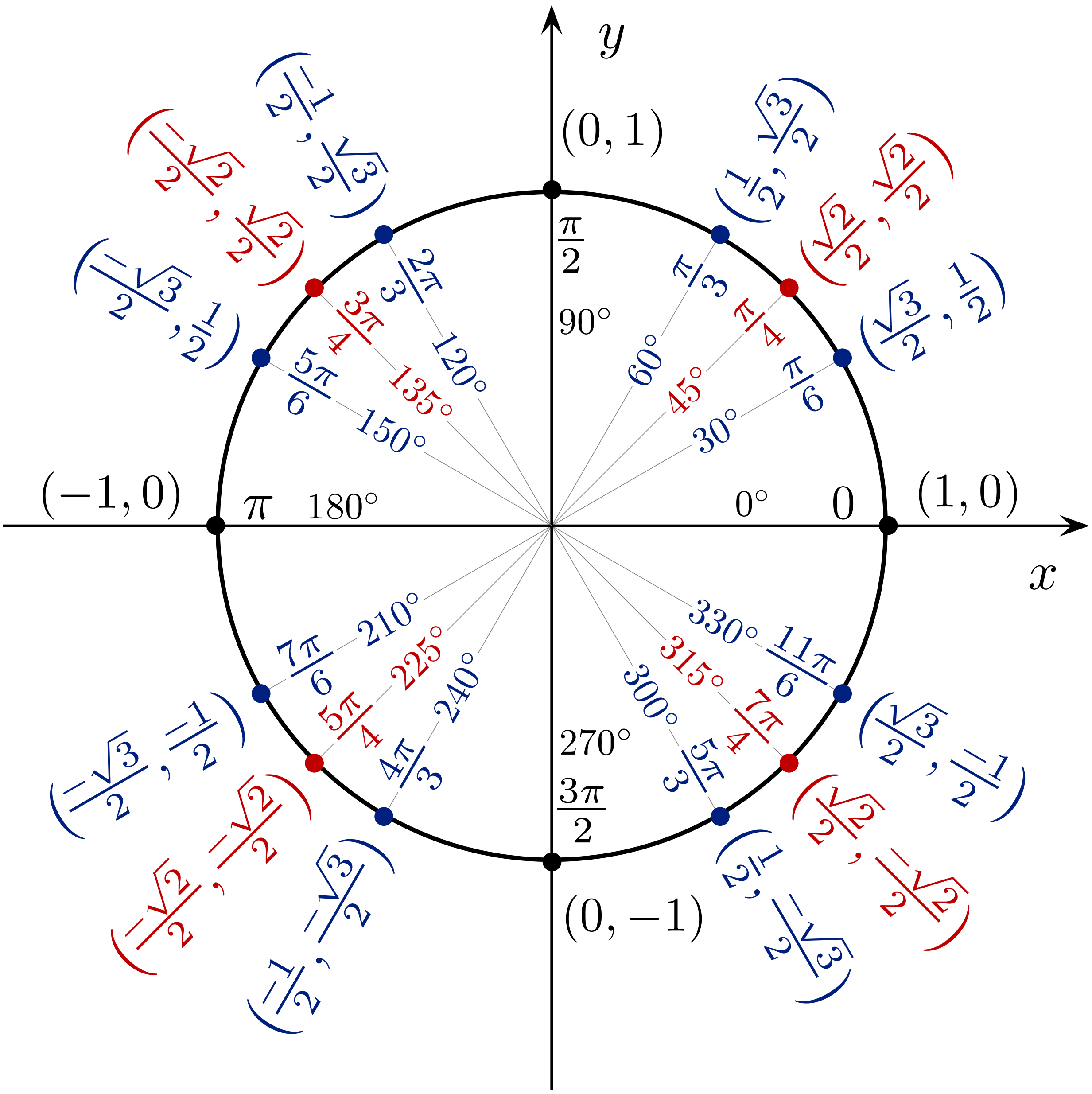
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflect about y-axis

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





6.1 Spegling

Spegling genom en linje som går genom origo.

Tillvägagång: Gå vinkelrätt mot speglingslinjen och gå lika långt åt andra hållet.

Spegling	Matris
I x-axeln	$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Spegling	Matris
I y-axeln	$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
I linjen $y = x$	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Varför måste speglingslinjen gå genom origo? >

6.2 Projektion

Ortogonal projektion på en linje genom origo.

Projektion	Matris
På x-axeln	$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
På y-axeln	$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
På linjen $y = x$	$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6.3 Rotation i $\mathbb{R}^2$

Rotation moturs med vinkel θ:

$$\boxed{R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

Härledning:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

Använd additionsformlerna för att få rotationsmatrisen.

Rotation $\frac{\pi}{3}$: Vad avbildas på $(1, 2)$? >

Rotation medurs >

---

7. Sammansättningar av avbildningar

> [3B1B: Matrix multiplication as composition](#)

7.1 Definition

Givet:

- $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Sammansättningen:

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x}))$$

7.2 Satser

Sats 1: Om S och T är linjära, så är $S \circ T$ linjär.

Sats 2: Om $S = S_A$ och $T = T_B$, så är:

$$\boxed{S \circ T = T_{AB}}$$

Bevis: $(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})) = S(B\vec{x}) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$

Formel:

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

⚠ Matrismultiplikation är ej kommutativ >

Kan man alltid gå tillbaka? >

---

8. Inverser av linjära avbildningar

Sats

$$\boxed{T_A^{-1} = T_{A^{-1}}}$$

Bevis:

$$T_{A^{-1}} \circ T_A(\vec{x}) = T_{A^{-1}}(A\vec{x}) = A^{-1}(A\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

Krav >

---

9. Exempel: Sammansatt avbildning

Rotation följt av spegling >

---

10. Kvadrater av operatorer

Operator	Beräkning	Resultat
Spegling S (i $y = x$)	$S^2 = S \circ S$	$S^2 = I$
Projektion P (på $y = x$)	$P^2 = P \circ P$	$P^2 = P$ (idempotent)

Operator	Beräkning	Resultat
Rotation R_θ	$R_\theta^2 = R_\theta \circ R_\theta$	$R_\theta^2 = R_{2\theta}$

Beräkningar >

11. Inverser av operatorer

Operator	Invers	Kommentar
Spegling S	$S^{-1} = S$	Spegling är sin egen invers
Projektion P	**Existerar ej**	Singulär matris
Rotation R_θ	$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$	Rotera tillbaka

Varför är projektionsmatrisen ej inverterbar? >

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Linear transformations and matrices (kap 3) — visuellt vad linjära avbildningar gör med rummet
- 3Blue1Brown: Matrix multiplication as composition (kap 4) — sammansättningar av avbildningar, hur sammansatta avbildningar motsvarar matrismultiplikation
- 3Blue1Brown: Three-dimensional linear transformations (kap 5) — avbildningar i 3D
- 3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space (kap 7) — inversa avbildningar, singulära matriser

Interaktiva verktyg

GeoGebra: Matrix Transformations — applicera matriser på former, se rotation/spegling/skalning

GeoGebra: 2D Linear Transformations — dra basvektorer, se effekten

GeoGebra: Matrix Representation of Rotation — rotationsmatriser visualiserade

- Falstad: Matrix Simulation — interaktiv 2D-transformation med determinant och egenvärden
- MatVis — Interactive Matrix Visualization — inspirerad av 3B1B, sliders för matriskomponenter, egenvektorer
- Desmos: Linear Transformations

- Visualize It: Linear Transformations — skalning, rotation, skjuvning

Wikipedia

- Linear map
- Transformation matrix
- Rotation matrix
- Projection (linear algebra)
- Function composition

Fördjupning

- 3Blue1Brown: Lesson page — Linear transformations — interaktiva övningar
- 3Blue1Brown: Lesson page — Matrix multiplication — interaktiva övningar
- Georgia Tech: Interactive Linear Algebra — fri interaktiv lärobok

---