

Likformig fördelning

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Sannolikhetsfunktion

En stokastisk variabel är likformigt fördelad när inget värde är mer troligt än något annat. I det diskreta fallet är det den klassiska sannolikhetsdefinitionen översatt till stokastiska variabler. I det kontinuerliga fallet, rektangelfördelningen $R(a, b)$, är det modellen för "någon gång i intervallet, helt slumpmässigt": en ankomsttid, ett avrundningsfel, en brottpunkt.

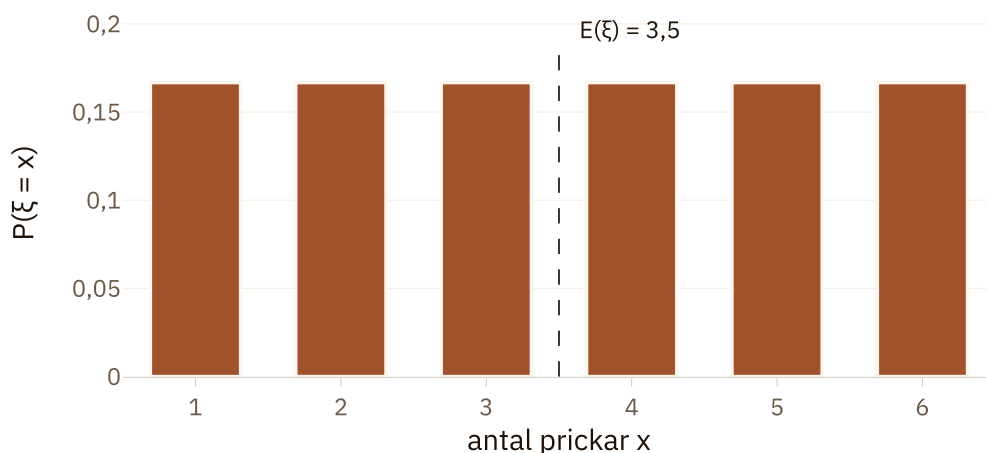
1. Sannolikhetsfunktionen

Om ξ kan anta de m värdena $x_1, \dots, x_m$ och alla är lika sannolika är

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

Standardexemplet är antalet prickar vid kast med en symmetrisk tärning: $m = 6$ och $P(\xi = x) = 1/6$ för $x = 1, \dots, 6$.

Tärningskast: sex lika sannolika värden



Fördelningen är samma sak som den klassiska sannolikhetsdefinitionen: m lika sannolika utfall, där varje värde är ett gynnsamt utfall.

2. Väntevärde och varians för $1, 2, \dots, m$

När värdena är heltalen $1, 2, \dots, m$ ligger masscentrum mitt i:

$$E(\xi) = \frac{m+1}{2}, \quad V(\xi) = \frac{m^2-1}{12}$$

För tärningen blir $E(\xi) = 3,5$ och $V(\xi) = 35/12 \approx 2,92$.

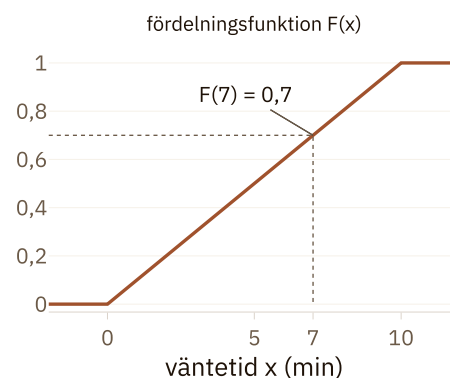
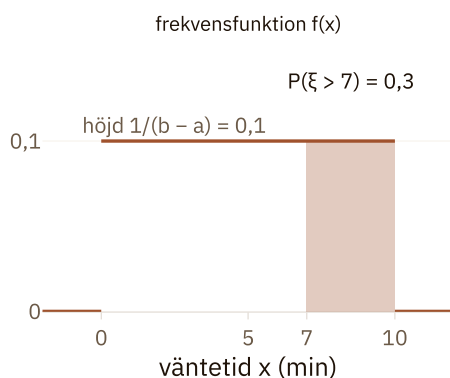
3. Kontinuerlig likformig fördelning: $R(a, b)$

En **kontinuerlig** variabel som är lika sannolik överallt i intervallet $[a, b]$ är **rektangelfördelad**, $\xi \in R(a, b)$. Frekvensfunktionen är konstant, och konstanten måste vara $1/(b-a)$ för att arean ska bli 1:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad F_{\xi}(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Sannolikheten för ett delintervall är alltså dess längd delad med hela intervallets längd, samma idé som den klassiska definitionen men med längder i stället för antal.

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad V(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Härledning av $E(\xi)$ och $V(\xi)$

$$E(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \quad E(\xi^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$V(\xi) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Väntevärdet är mittpunkten, vilket symmetrin kräver. Standardavvikelsen $(b - a)/\sqrt{12} \approx 0,29(b - a)$ beror bara på intervallets längd.

☰ Exempel – Väntan på bussen

En buss går var tionde minut, och vi kommer till hållplatsen utan att titta på tidtabellen. Väntetiden är då $\xi \in R(0, 10)$ minuter.

- Vad är sannolikheten att vi får vänta mer än 7 minuter?
- Bestäm väntevärde och standardavvikelse för väntetiden.

Lösning

a) Intervallet $(7, 10]$ har längden 3 av totalt 10:

$$P(\xi > 7) = 1 - F_{\xi}(7) = 1 - \frac{7}{10} = \boxed{0,3}$$

b)

$$E(\xi) = \frac{0 + 10}{2} = \boxed{5 \text{ min}}, \quad D(\xi) = \frac{10 - 0}{\sqrt{12}} \approx \boxed{2,89 \text{ min}}$$

Samma väntetid återkommer i **lektion 19**, där två sådana väntetider adderas och summan *inte* blir likformig.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Vanliga fel

- **Glömma nämnaren.** $f_{\xi}(x) = 1/(b - a)$, inte 1. Bara på intervall med längden 1, som $R(0, 1)$, är höjden 1.
- **Tolv, inte två.** Variansen är $(b - a)^2/12$. Standardavvikelsen är $(b - a)/\sqrt{12}$, inte $(b - a)/2$.
- **Diskret eller kontinuerlig.** En tärning har $V = (m^2 - 1)/12 = 35/12$, rektangelfördelningen på $[1, 6]$ har $25/12$. Formlerna är inte utbytbara.

Se även

- Klassiska sannolikhetsdefinitionen
- Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler
- Sannolikhetsfunktion
- Väntevärde
- Kontinuerliga stokastiska variabler

Resurser

- [Wikipedia: Discrete uniform distribution](#)[?]
-
-