Lagranges multiplikatormetod

Jun 12, 2026, 7 min read

#matematik #flervariabelanalys #optimering #gradient

> **Kapitel:** 14.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Gradient och riktningsderivata, Kritiska punkter, Extremvärdesproblem, Nivåkurvor och ytor

---

1. Problemet – optimering under bivillkor

Vi vill bestämma största och minsta värde av

$$f(x, y) \quad \text{under bivillkoret} \quad g(x, y) = 0.$$

Geometriskt: vi letar extremvärden av f enbart bland de punkter som ligger på kurvan $g = 0$, inte i hela planet. Samma princip gäller i tre eller fler variabler, där $g(x, y, z) = 0$ skär ut en yta istället för en kurva.

> **Var dyker bivillkor upp?**
>
> - Största/minsta avstånd från origo till en kurva eller yta.
> - Randundersökning i Extremvärdesproblem på kompakta områden.
> - Fysik: optimera energi/verkningsgrad under en bevarandelag.
> - Ekonomi: maximera nytta under en budgetrestriktion.

---

2. Geometrisk idé – tangerande nivåkurvor

Betrakta nivåkurvorna $f = c$ för olika c och bivillkoret $g = 0$. När c ändras glider f-kurvan genom planet. Extremvärden på bivillkoret inträffar i just de punkter där nivåkurvan $f = c^*$ **tangerar** kurvan $g = 0$.

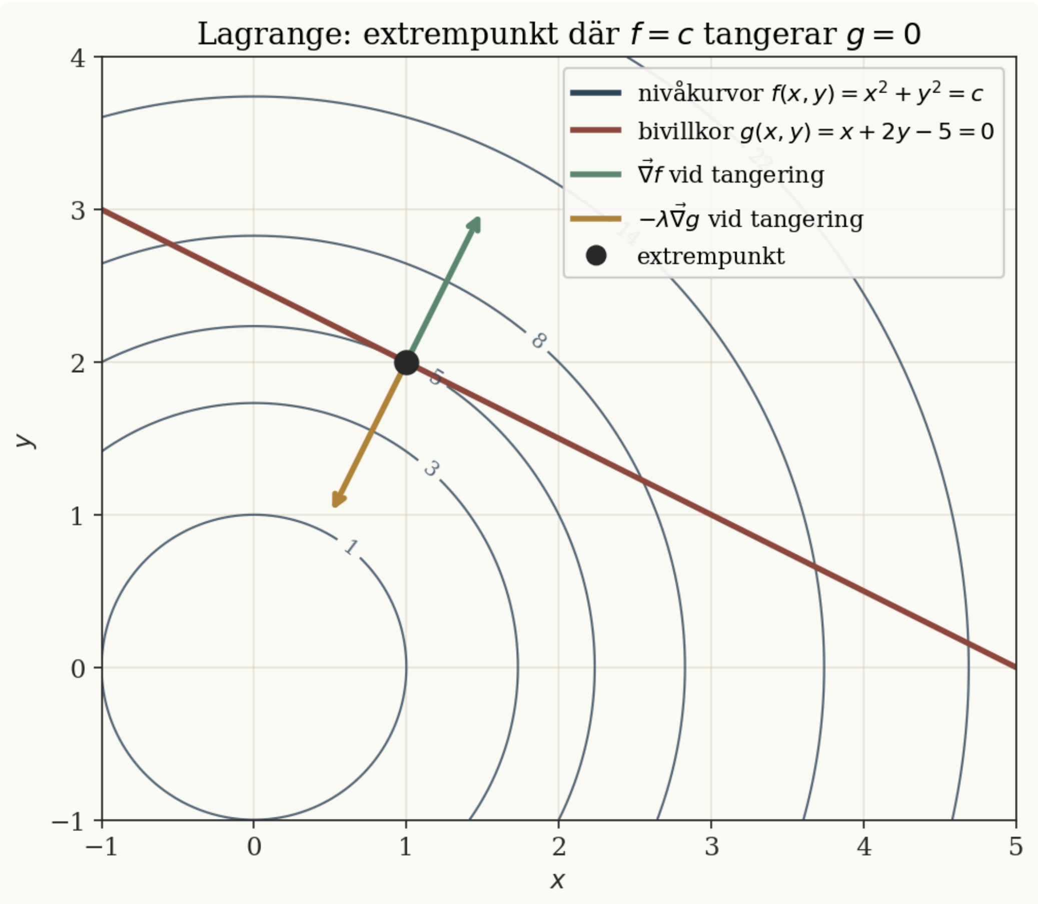
I en tangeringspunkt är kurvornas normalvektorer parallella. Eftersom gradienten är normal till en nivåkurva ger det:

$$\boxed{\vec{\nabla} f = -\lambda \, \vec{\nabla} g}$$

för något tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Talet λ kallas **Lagrangemultiplikator**. Tecknet är bara konvention — det viktiga är att gradienterna är parallella.

Intuition

Skulle gradienterna inte vara parallella, finns en komponent av $\vec{\nabla} f$ längs bivillkoret. Då kan man röra sig på $g = 0$ och öka (eller minska) f. Alltså kan ingen extrempunkt ligga där.



Nivåkurvor till f tangerar bivillkoret $g = 0$ i extrempunkten — där är $\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$.

3. Lagrangefunktionen

Introducera hjälpfunktionen

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).$$

Det nödvändiga villkoret ovan kan då skrivas kompakt som

$$\vec{\nabla}\mathcal{L} = \vec{0} \iff \begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x + \lambda\, g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y + \lambda\, g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = g(x, y) = 0. \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger **stationaritetsvillkoret** ($\vec{\nabla} f = -\lambda\, \vec{\nabla} g$), den tredje ger själva **bivillkoret** ($g = 0$).

> **Generalisering till tre variabler**
>
> För $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ ser det likadant ut:
> $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f + \lambda g, \qquad \vec{\nabla}\mathcal{L} = \vec{0}.$

---

4. Determinantformen (utan λ)

Parallellitetsvillkoret $\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$ i två variabler kan uttryckas utan att införa λ:

$$\boxed{\det\left[\vec{\nabla} f \quad \vec{\nabla} g\right] = \begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0.}$$

Tillsammans med $g = 0$ får man ett system i bara (x, y) – praktiskt när λ inte är intressant i sig.

---

5. Metod – steg för steg

> **Recept**
>
> För att hitta extremvärden av f under bivillkoret $g = 0$:

1. **Ställ upp** $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f + \lambda g$.
2. **Sätt upp systemet** $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_\lambda = 0$.
3. **Lös systemet.** Standardknep: bryt ut λ ur de två första ekvationerna och sätt uttrycken lika. Var noga med villkor när du dividerar.
4. **Kontrollera specialfall** separat — t.ex. där variabler är 0, eller där $\vec{\nabla} g = \vec{0}$ (**singulär punkt** på bivillkoret).
5. **Beräkna** f i alla kandidatpunkter och jämför.

⚠ **Vanliga fallgropar**

- **Division utan villkor.** När du delar med en variabel, glöm inte att kontrollera fallet då den är 0.
- **Ej kompakt bivillkor.** Om $g = 0$ inte är begränsat behöver max/min inte existera — argumentera först för att de gör det.
- **Singulära punkter.** Om $\vec{\nabla} g(p) = \vec{0}$ kan p vara en extrempunkt utan att uppfylla Lagranges ekvationer.
- **Lagrange räcker inte för ojämlikhet.** För $g \leq 0$ (kompakt område) måste man även undersöka det inre — se Extremvärdesproblem.

---

6. Exempel

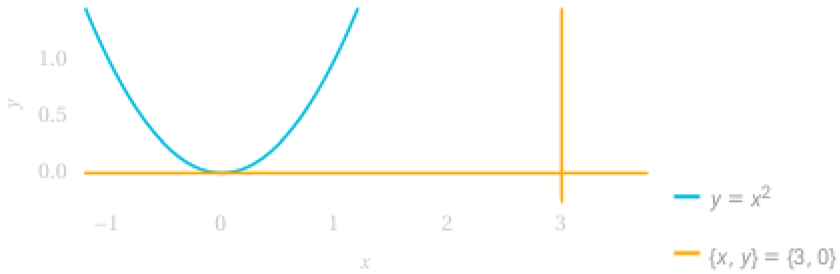
Exempel 1 — Avstånd från origo till en linje ›

Exempel 2 — Punkter på en ellips närmast och längst från origo ›

Exempel 3 — Extremvärden på en sfär ›

Hitta kortaste distansen från $(3, 0)$ till $y = x^2$

$f(x, y) = \text{dist}^2 = (x-3)^2 + y^2 \quad g(x, y) = y - x^2$



$$\mathcal{L}(x, y) = \vec{0}$$

7. Sammanhang med randundersökning

Lagranges metod är precis det man gör när man undersöker **randen** i ett Extremvärdesproblem på ett kompakt område $K = \{g \leq 0\}$:

1. Kritiska inre punkter: $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ inuti K.
2. Singulära inre punkter.
3. **Rand $g = 0$:** Lagranges multiplikatormetod (eller parametrisering).

Jämför alla kandidatvärden — störst är max, minst är min.

Läsning

- 14.3 Lagrange Multipliers
- 14.4 Lagrange Multipliers in n-Space

Se även

- Gradient och riktningsderivata
- Kritiska punkter
- Extremvärdesproblem
- Nivåkurvor och ytor
- Kvadratisk form

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown / Khan Academy: Lagrange multipliers, using tangency to solve constrained optimization
- Khan Academy: Lagrange multipliers introduction

Wikipedia

- Lagrange multiplier

Kurslitteratur

- Adams — 14.3 Lagrange Multipliers
