

Lagen om total sannolikhet

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Betingad sannolikhet

Delar vi upp utfallsrummet i disjunkta fall kan sannolikheten för en händelse räknas fall för fall och sedan summeras. Varje term är fallets sannolikhet gånger den betingade sannolikheten för händelsen i just det fallet.

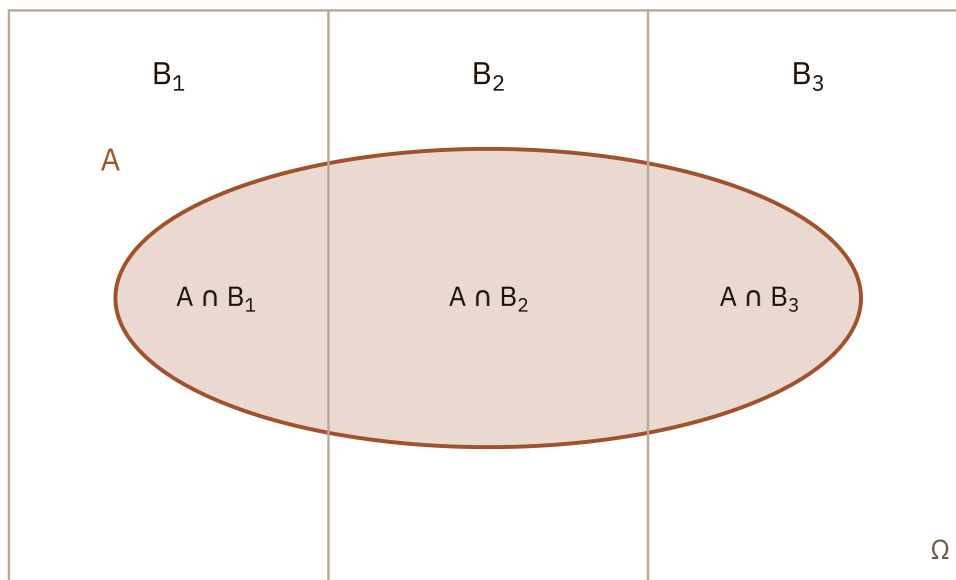
1. Satsen

Sats 2.7. Antag att händelserna $B_1, B_2, \dots, B_n$ är disjunkta och tillsammans utgör hela utfallsrummet. Då gäller för varje händelse A att

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \dots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

2. Varför

$B_1, \dots, B_n$ skär A i disjunkta bitar $A \cap B_1, \dots, A \cap B_n$ som tillsammans är hela A :



Disjunkta bitar adderas enligt **sannolikhetsmåttets** egenskap c), och varje bit skrivs om med **multiplikationsformeln** $P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A \mid B_i)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A \mid B_i)$$

3. I ett träd diagram

Satsen är exakt det vi gör i ett träd diagram: första nivån är fallen B_i , andra nivån är de betingade sannolikheterna för A i varje fall. Vi multiplicerar längs varje gren som slutar i A och adderar grenarna.

När satsen behövs

Signalen i en uppgift är att sannolikheten för A är given *per grupp* — per fabrik, per transportsätt, per skickat tecken — tillsammans med hur stor varje grupp är. Då är fallen B_i grupperna.

Frågar uppgiften därefter “givet att A inträffade, vilken grupp kom det från?” är nästa steg **Bayes sats**.

Vanliga fel

- **Fallen täcker inte allt eller överlappar.** $B_1, \dots, B_n$ måste vara disjunkta och tillsammans vara hela Ω . Kontroll: $P(B_1) + \dots + P(B_n) = 1$.
- **Summera de betingade sannolikheterna utan vikter.** $P(A \mid B_1) + P(A \mid B_2)$ är ingen sannolikhet. Varje term ska vägas med $P(B_i)$.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 2, övning 6a (Vännman 2.25) – Batterier från tre fabriker

Tillverkningen av ett batteri är förlagd till tre fabriker: fabrik A står för 50 %, B för 20 % och C för 30 %. Ett batteri från fabrik A har 95 % sannolikhet att räcka mer än 100 drifttimmar. Motsvarande för B och C är 97 % respektive 98 %. Batterierna blandas i ett stort centrallager. Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret räcker mer än 100 drifttimmar?

Lösning

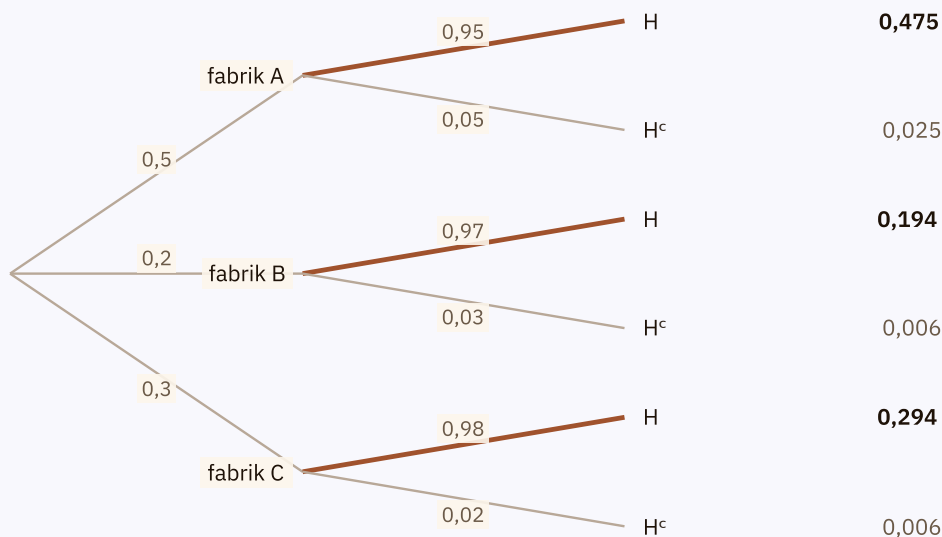
Beteckningar. A, B, C = batteriet kommer från respektive fabrik; H = batteriet räcker mer än 100 timmar. Fabrikerna är disjunkta och täcker hela lagret.

$$P(A) = 0,50, \quad P(H \mid A) = 0,95$$

$$P(B) = 0,20, \quad P(H \mid B) = 0,97$$

$$P(C) = 0,30, \quad P(H \mid C) = 0,98$$

Lagen om total sannolikhet — i trädet är det summan av de grenar som slutar i H :



$P(H)$ = summan av de markerade grenarna = 0,963

$$P(H) = 0,50 \cdot 0,95 + 0,20 \cdot 0,97 + 0,30 \cdot 0,98 = 0,475 + 0,194 + 0,294 = \boxed{0,963}$$

Rimlighetskoll. Svaret är ett viktat medelvärde av 0,95, 0,97 och 0,98 och måste därför ligga mellan dem. Det gör det, och närmast 0,95 eftersom fabrik A väger tyngst.

Fortsättningen, b), finns i [Bayes sats](#).

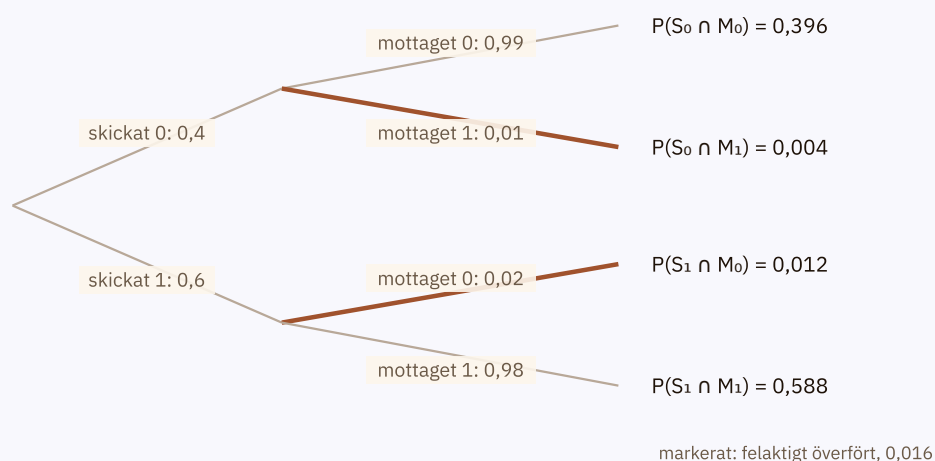
Svar i boken (2:a uppl., 2.24 = 3:e uppl. 2.25): 0,96.

≡ Lektion 2, övning 8b (Vännman 2.27) – Felaktigt överförda tecken

Meddelanden kodade i binära tecken 0 och 1 överförs i ett telekommunikationssystem. Ett utsänt tecken 0 mottas som 1 med sannolikhet 0,01 (och som 0 med sannolikhet 0,99). Ett utsänt tecken 1 mottas som 0 med sannolikhet 0,02 (och som 1 med sannolikhet 0,98). Tecknet 1 förekommer i proportion 0,6 och tecknet 0 i proportion 0,4. Hur stor andel av tecknen överförs felaktigt?

Lösning

Beteckningar. S_0, S_1 = tecknet 0 respektive 1 skickas; M_0, M_1 = tecknet 0 respektive 1 mottas.



Ett fel är att skicka 0 och ta emot 1, eller att skicka 1 och ta emot 0. De två grenarna är disjunkta:

$$P(\text{fel}) = P(S_0)P(M_1 \mid S_0) + P(S_1)P(M_0 \mid S_1) = 0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,02 = 0,004 + 0,012 = 0,016$$

Deluppgift a) finns i **Bayes sats**.

Svar i boken (2:a uppl., 2.26 = 3:e uppl. 2.27): 0,016. Stämmer också med det handskrivna lösningsförslaget.

Se även

- [Betingad sannolikhet](#)
- [Bayes sats](#)
- [Sannolikhetsmått](#)
- [Multiplikationsprincipen](#)

Resurser

- [Khan Academy: Probability](#)
 - [Wikipedia: Law of total probability](#)
-
-