

Kvanttal

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #storhet

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen för väteatomen

Tre kvanttal faller ut ur väteatomens vågfunktion utan att postuleras. Huvudkvanttalet n kommer ur $R(r)$, bestämmer energin och numrerar skalen K, L, M, N och så vidare. Det azimuthala kvanttalet l kommer ur $\Theta(\theta)$ och kvantiserar rörelsemängdsmomentets storlek; det löper från 0 till $n - 1$, och att $l = 0$ ger $L = 0$ skiljer sig från Bohrs modell. Det magnetiska kvanttalet m_l kommer ur $\Phi(\phi)$ och kvantiserar z-komponenten från $-l$ till l , vilket innebär att L_z alltid är mindre än L utom när båda är noll.

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad L_z = m_l \hbar$$

Fysika: Fd3 (kvanttal: de tillåtna värdena på n , l och m)

Formeln, symbol för symbol

$$L = \sqrt{\underbrace{l(l+1)}_{\substack{l=0,1,\dots, \\ n-1}}} \hbar$$
$$L_z = \underbrace{m_l}_{\substack{-l,\dots,0, \\ \dots,+l}} \hbar$$

Storleken och z-komponenten kvantiseras var för sig. Eftersom $\sqrt{l(l+1)} > l \geq |m_l|$ är vektorn alltid längre än sin projektion på z-axeln, så den kan aldrig peka rakt längs axeln.

1. Tre kvanttal ur tre ekvationer

Varje del av vågfunktionen $\psi = R\Theta\Phi$ i Schrödingerekvationen för väteatomen har ett eget randvillkor, och varje randvillkor ger ett heltal.

Kvanttal	Kommer ur	Tillåtna värden	Bestämmer
n , huvudkvanttalet	$R(r)$	$1, 2, 3, \dots$	energin E_n och storleken
l , azimuthala kvanttalet	$\Theta(\theta)$	$0, 1, \dots, n-1$	$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ och formen
m_l , magnetiska kvanttalet	$\Phi(\phi)$	$-l, \dots, 0, \dots, l$	$L_z = m_l\hbar$ och orienteringen

Magnetiska kvanttalet har fått sitt namn av att tillstånd med olika m_l får olika energi i ett yttre magnetfält längs z . Utan fält har de samma energi.

Tillstånd med samma n bildar ett **skal**: K ($n = 1$), L ($n = 2$), M ($n = 3$), N ($n = 4$). Tillstånd med samma n och l bildar ett **underskal**, som betecknas med en bokstav: s ($l = 0$), p ($l = 1$), d ($l = 2$), f ($l = 3$).

Se [Atomorbitaler](#).

2. Antalet tillstånd

För ett givet l kan m_l anta $2l + 1$ värden. Summera över alla tillåtna l i skalet n :

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n$$

Varje skal innehåller alltså

$$N_n = n^2$$

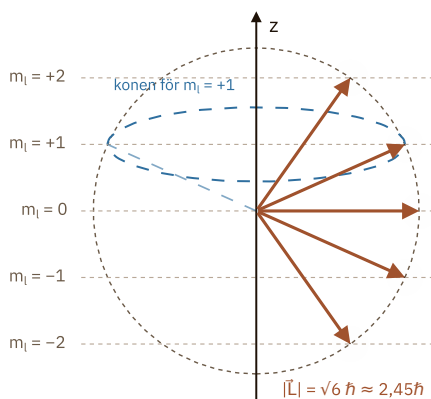
olika kombinationer av (n, l, m_l) , och i väte har de alla samma energi. Med **spinn** fördubblas antalet till $2n^2$, och det är grunden för periodiska systemet via **Paulis uteslutningsprincip**.

3. Vektormodellen

Rörelsemängdsmomentet har längden $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ men z -komponenten $m_l\hbar$. Vinkeln θ_L mellan $\vec{L}$ och z -axeln ges av

$$\cos \theta_L = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Eftersom $|m_l| \leq l < \sqrt{l(l+1)}$ blir θ_L aldrig noll, utom i det triviala fallet $l = 0$ där $\vec{L} = \vec{0}$. $\vec{L}$ kan alltså aldrig peka exakt längs z -axeln. Om den gjorde det skulle $L_x = L_y = 0$ vara exakt kända samtidigt som L_z , och det förbjuds av osäkerhetsrelationen för rörelsemängdsmomentets komponenter. Bara L_z är skarp. $\vec{L}$ ligger någonstans på en kon runt z -axeln, och L_x och L_y är obestämda.



$l = 2$: fem tillåtna $L_z = m_l \hbar$

$\vec{L}$ är längre än varje L_z , så den kan aldrig peka rakt längs z

$\vec{L}$ ligger någonstans på en kon;
 L_x och L_y är obestämda

$$\cos \theta_L = m_l / \sqrt{l(l+1)}$$

$$m_l = +2 \text{ ger } \theta_L = 35,3^\circ, \text{ inte } 0^\circ$$

Vektormodellen för $l = 2$. $\vec{L}$ har alltid längden $\sqrt{6} \hbar$, men bara fem z-komponenter är tillåtna, $L_z = -2\hbar, \dots, 2\hbar$. För varje m_l ligger $\vec{L}$ någonstans på en kon kring z-axeln (streckad för $m_l = +1$), aldrig längs själva axeln.

Riktningen på z-axeln är godtycklig tills något utifrån väljer den, till exempel ett magnetfält.

⚠ Vanliga fel

- l upp till n . l går bara till $n - 1$, så det finns ingen 1p eller 2d.
- $L = l\hbar$. Storleken är $\sqrt{l(l+1)} \hbar$, som alltid är större än det största $L_z = l\hbar$.
- m_l upp till $\pm n$. m_l begränsas av l , inte av n .
- De negativa L_z glöms. m_l går från $-l$ till $+l$, totalt $2l + 1$ värden.
- Spinnets räknas in i n^2 . n^2 räknar kombinationer av (n, l, m_l) . Med spinn blir det $2n^2$.

4. Lösta exempel

≡ Exempel – Vinklarna för $l = 3$

En elektron i en väteatom har rörelsemängdsmomentet $L = \sqrt{12} \hbar$.

a) Vilket är l , och vilket är det minsta möjliga n ? b) Vilka värden kan L_z anta? c) Beräkna vinkeln mellan $\vec{L}$ och z-axeln för $m_l = 3, 2, 1$ och 0. d) Hur många olika kombinationer av (n, l, m_l) finns det för det n du fick i a)?

 Lösning

a) Kvanttalen. $l(l+1) = 12$ ger $l = 3$. Eftersom $l \leq n-1$ måste $n \geq 4$, så det minsta är $n = 4$.

b) Komponenterna. $m_l = -3, -2, \dots, 3$ ger sju värden:

$$L_z = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$$

c) Vinklarna. Med $\cos \theta_L = m_l / \sqrt{12}$:

$$m_l = 3 : \quad \theta_L = \arccos \frac{3}{\sqrt{12}} = 30,0^\circ$$

$$m_l = 2 : \quad \theta_L = \arccos \frac{2}{\sqrt{12}} = 54,7^\circ$$

$$m_l = 1 : \quad \theta_L = \arccos \frac{1}{\sqrt{12}} = 73,2^\circ$$

$$m_l = 0 : \quad \theta_L = 90,0^\circ$$

De negativa m_l ger supplementvinklarna $106,8^\circ$, $125,3^\circ$ och $150,0^\circ$. Inte ens $m_l = 3$ ger en vektor längs z-axeln.

d) Antalet. $N_4 = 4^2 = 16$, nämligen $1 + 3 + 5 + 7$ för $l = 0, 1, 2, 3$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.3 The Hydrogen Atom