

Kvantmekanisk tunnling

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

Kurs: F0005T Förkunskaper: Partikel i potentialbrunn

En partikel med energin E lägre än barriärhöjden U_0 kan ändå ta sig igenom en tillräckligt tunn barriär, eftersom vågfunktionen avtar exponentiellt inuti barriären men inte hinner nå noll. Partikeln borrar sig inte igenom och förlorar ingen energi i processen — den lämnar inget hål. Sannolikheten är proportionell mot kvadraten på kvoten mellan amplituderna på barriärens två sidor och beror extremt känsligt på bredden L och på massan: samma barriär som ger $T \approx 10^{-3}$ för en elektron ger 10^{-143} för en proton. Tunnling förklarar α -sönderfall ur instabila kärnor och vissa kemiska reaktioner med väte.

$$T = Ge^{-2\kappa L}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}, \quad G = 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

Fysika: Fd3 (tunneleffekt, med E_p och m_p för partikelns energi och massa)

Formeln, symbol för symbol

$$T = \underbrace{G}_{\substack{\text{förfaktor,} \\ \text{mellan 0 och 4 avtagande i kvadrat}}} \underbrace{e^{-2\kappa L}}_{\text{amplitudens}} \\ \kappa = \frac{\sqrt{2 \underbrace{m}_{\text{massan}} \underbrace{(U_0 - E)}_{\substack{\text{höjden} \\ \text{över } E}}}}{\hbar}$$

Inne i barriären avtar vågfunktionen som $e^{-\kappa x}$, och sannolikheten som kvadraten på den. Allt som gör κL större — bredare barriär, tyngre partikel, längre upp till toppen — hamnar i exponenten, och därför är tunnling så känslig.

1. Klassiskt förbjudet område

Ta en rektangulär barriär: $U = U_0$ för $0 \leq x \leq L$ och $U = 0$ utanför. En partikel med energin $E < U_0$ kommer in från vänster. Inuti barriären skulle den kinetiska energin bli

$$K = E - U_0 < 0$$

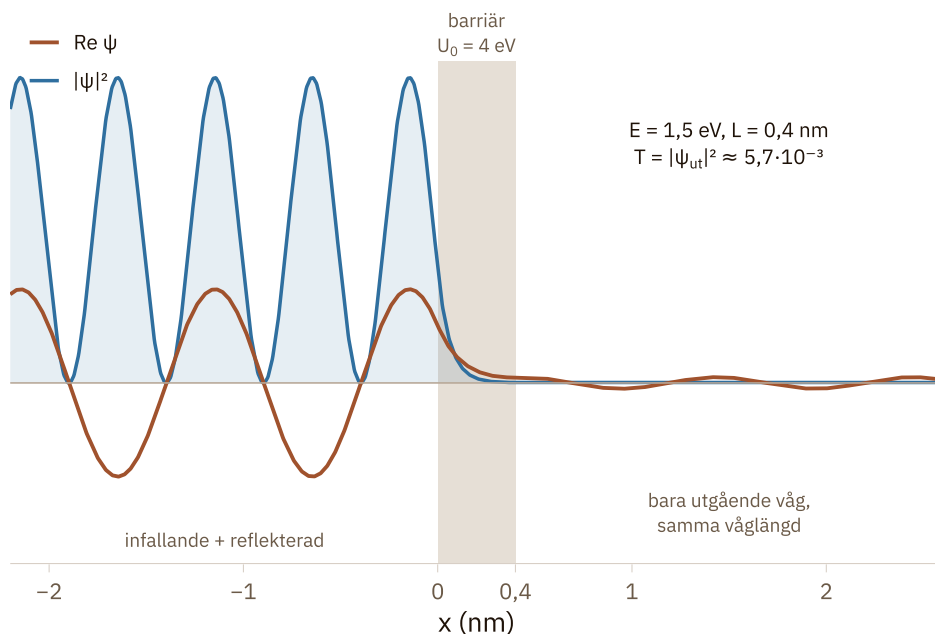
och det går inte klassiskt, så partikeln studsar alltid tillbaka. Kvantmekaniskt finns ingen sådan spär. **Schrödingerekvationen** har lösningar också där $E < U$, men de oscillerar inte.

2. Vågfunktionen i tre områden

- **Vänster om barriären** ($x < 0$): en infallande och en reflekterad våg med vågtalet $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.
- **Inuti barriären** ($0 \leq x \leq L$): samma ekvation som i väggen på en **ändlig brunn**, alltså en kombination av e^{kx} och e^{-kx} .
- **Höger om barriären** ($x > L$): bara en utgående våg. Där är $U = 0$ igen och energin densamma, så vågtalet är samma k som till vänster.

Vid $x = 0$ och $x = L$ måste både ψ och $d\psi/dx$ vara kontinuerliga. De fyra villkoren bestämmer alla amplituder i förhållande till den infallande, och den utgående amplituden blir aldrig noll.

Tunnelsannolikheten T är kvadraten på kvoten mellan den utgående och den infallande amplituden.



Exakt lösning för en elektron med $E = 1,5 \text{ eV}$ mot en barriär med $U_0 = 4 \text{ eV}$ och $L = 0,4 \text{ nm}$. Till vänster interfererar den infallande och den reflekterade vågen, inuti barriären avtar ψ exponentiellt, och till höger fortsätter en våg med samma våglängd men mycket mindre amplitud: $T \approx 5,7 \cdot 10^{-3}$.

✎ Varför exponenten är $-2\kappa L$

Inuti barriären. När barriären är bred dominerar den avtagande termen:

$$\psi(x) \approx De^{-\kappa x}$$

Över barriären. Från $x = 0$ till $x = L$ minskar amplituden med faktorn

$$\frac{|\psi(L)|}{|\psi(0)|} \approx e^{-\kappa L}$$

Sannolikheten. Sannolikheten går som amplituden i kvadrat:

$$T \propto (e^{-\kappa L})^2 = e^{-2\kappa L}$$

Förfaktorn. När sinusvågen passas ihop med exponentialfunktionerna vid båda kanterna blir förfaktorn $G = 16 \frac{E}{U_0} (1 - \frac{E}{U_0})$, som ligger mellan 0 och 4. Den exakta lösningen innehåller också den växande termen $e^{\kappa x}$. Den är försumbar bara när $\kappa L \gg 1$, och därför gäller formeln bara när $T \ll 1$.

3. Känsligheten

Logaritmera ingressens formel:

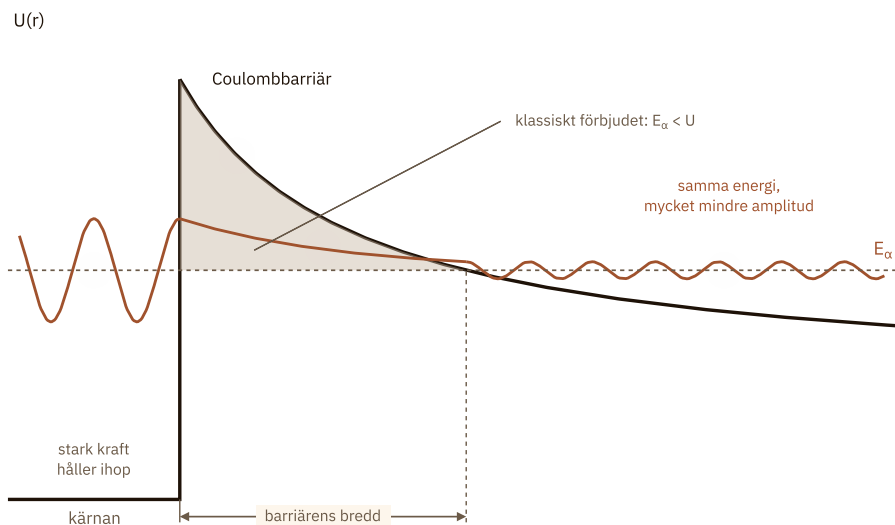
$$\ln T = \ln G - 2\kappa L$$

Bredden och κ står i exponenten, medan G bara står framför. Därför är tunnling så känslig:

- **Bredden.** Varje gång L ökar med $\ln 10/(2\kappa)$ blir T tio gånger mindre. För en elektron med $U_0 - E = 2,50$ eV räcker det med 0,142 nm.
- **Massan.** $\kappa \propto \sqrt{m}$. En proton är 1836 gånger tyngre än en elektron, så exponenten blir ungefär 43 gånger större.
- **Avståndet till toppen.** $\kappa \propto \sqrt{U_0 - E}$, så ju närmare toppen partikeln ligger, desto lättare tunnlar den.

Tillämpningar. Elektroner tunnlar genom tunna oxidskikt mellan två ledare. Det utnyttjas i tunneldioden och i Josephsonövergången mellan två supraleutare. **Sveptunnelmikroskopet** mäter tunnelströmmen över ett vakuumgap. Vid α -sönderfall tunnlar alfapartikeln ut genom kärnans

Coulombbarriär. I solens kärna tunnlrar protoner genom varandras Coulombbarriär, så fusionen går vid en lägre temperatur än klassisk fysik skulle kräva.



α -sönderfall som tunnling. Inne i kärnan hålls alfapartikeln kvar av den starka kraften, och utanför knuffas den bort av Coulombrepulsionen. Med energin E_α under barriärens topp avtar ψ exponentiellt genom det klassiskt förbjudna området och fortsätter ut med samma energi men mycket mindre amplitud.

⚠ Vanliga fel

- U_0 i stället för $U_0 - E$ i κ . Det som räknas är barriärens höjd över partikelns energi.
- **eV direkt under roten.** $U_0 - E$ måste i joule innan κ räknas ut, och man delar med $\hbar$, inte h .
- **Faktorn 2 glöms.** Exponenten är $-2\kappa L$, eftersom sannolikheten går som amplituden i kvadrat.
- **Formeln används utanför sitt område.** $T = Ge^{-2\kappa L}$ förutsätter $E < U_0$ och $T \ll 1$. När $E > U_0$ finns ingen exponentiell dämpning, men en del reflekteras ändå.
- **Partikeln tros förlora energi.** Efter tunnlingen har den samma energi och samma våglängd som före. Det enda som är mindre är amplituden.

4. Lösta exempel

≡ Exempel – Elektron eller proton genom samma barriär

En partikel med energin 1,50 eV träffar en rektangulär barriär som är 4,00 eV hög och 0,800 nm bred.

a) Beräkna tunnelsannolikheten för en elektron. b) Hur bred får barriären högst vara om elektronens tunnelsannolikhet ska vara minst $1,00 \cdot 10^{-6}$? c) Beräkna tunnelsannolikheten för en proton med samma energi genom barriären i a).

Lösning

a) Förfaktorn. $E/U_0 = 0,375$:

$$G = 16 \cdot 0,375 \cdot (1 - 0,375) = 3,75$$

Avtagandet. $U_0 - E = 2,50 \text{ eV} = 4,005 \cdot 10^{-19} \text{ J}$:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 4,005 \cdot 10^{-19}}}{1,055 \cdot 10^{-34}} = 8,10 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Fysika: $\hbar$, m_e

Tunnelsannolikheten. $2\kappa L = 2 \cdot 8,10 \cdot 10^9 \cdot 0,800 \cdot 10^{-9} = 12,96$:

$$T = 3,75 e^{-12,96} = 3,75 \cdot 2,35 \cdot 10^{-6} \approx \boxed{8,82 \cdot 10^{-6}}$$

b) Lös ut bredden. Ur $\ln T = \ln G - 2\kappa L$:

$$L = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{G}{T} = \frac{\ln(3,75 \cdot 10^6)}{2 \cdot 8,10 \cdot 10^9} = \frac{15,14}{1,620 \cdot 10^{10}} \approx \boxed{0,934 \text{ nm}}$$

Barriären får bara bli 0,13 nm bredare innan sannolikheten sjunker nästan nio gånger.

c) Protonen. G beror bara på E/U_0 och är oförändrat. Med $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$:

$$\kappa_p = \frac{\sqrt{2 \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 4,005 \cdot 10^{-19}}}{1,055 \cdot 10^{-34}} = 3,47 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-1}$$

$$2\kappa_p L = 555,4 \quad T_p = 3,75 e^{-555,4} \approx \boxed{2,4 \cdot 10^{-241}}$$

Räknaren ger noll här, så räkna med tiologaritmen: $\lg T_p = \lg 3,75 - 555,4 / \ln 10 = -240,6$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.4 Potential Barriers and Tunneling