Kurvintegraler

Jun 12, 2026, 3 min read

#matematik #flervariabelanalys #integral

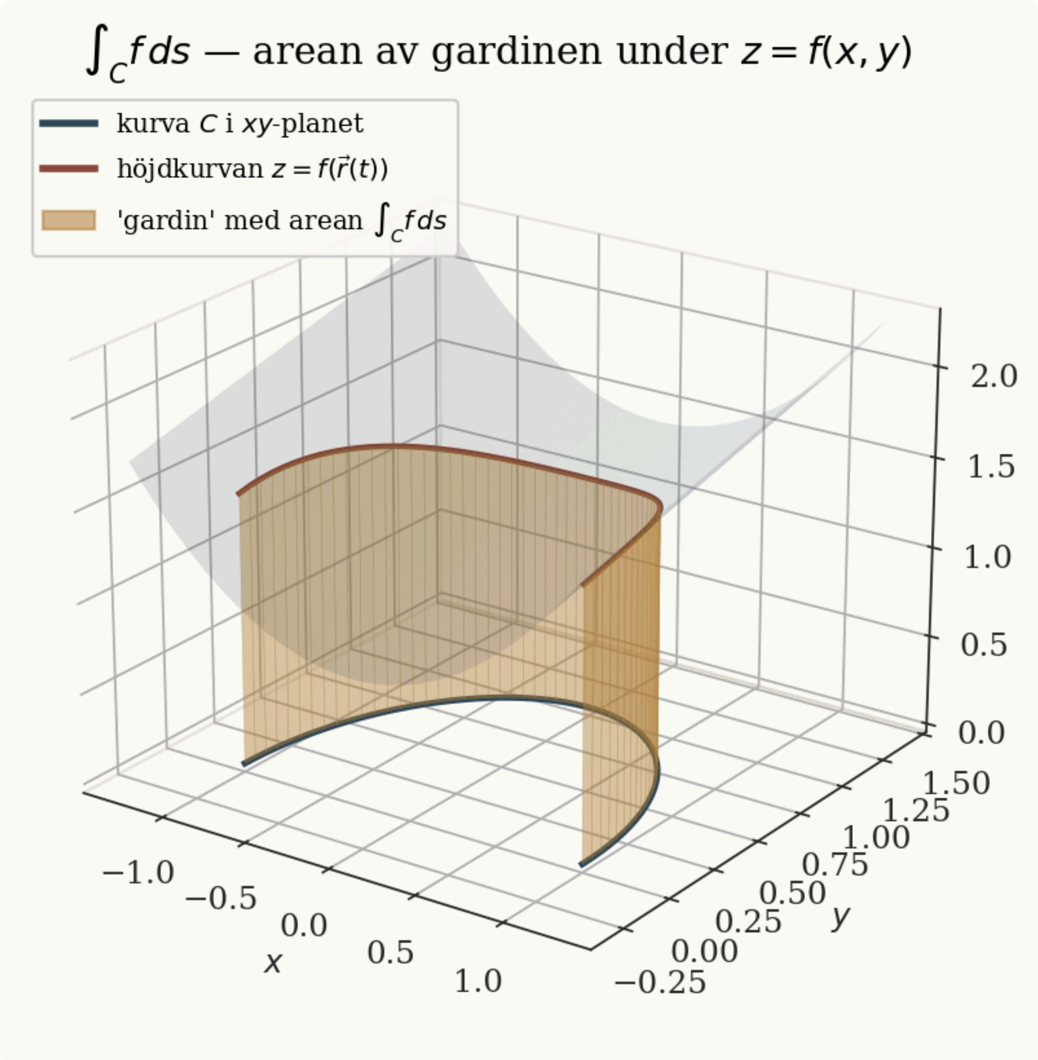
> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade kurvor, Integraler

---

1. Idén bakom kurvintegralen

Vanliga integraler $\int_a^b f(x)\,dx$ summerar funktionsvärden längs ett rakt intervall på reella linjen. *Kurvintegralen* generaliserar detta till en *krokig väg* i planet eller rummet.

> **Grundtanken**
>
> Tänk dig en böjd vajer som följer en kurva C, och en densitet $f(x, y)$ som varierar längs vajern. Massan blir summan av "lite längd $\times$ lokal densitet" — och det är precis $\int_C f\,ds$.



2. Definition

För en kurva $C: \ \vec{r}(t), \ t \in [a, b]$, och en skalärfunktion f definierad på C:

$$\boxed{\int_C f\,ds = \int_a^b f\left(\vec{r}(t)\right) \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt}$$

där ds är ett *båglängdselement*.

Härledning av ds

En liten bit av kurvan motsvarar ett litet steg Δt i parametern. Pythagoras längs kurvan ger

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \boxed{\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt}$$

dvs. båglängdselementet är *farten* i parametriseringen, gånger dt.

3D-fall

Allt fungerar likadant i $\mathbb{R}^3$ med $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$.

---

3. Oberoende av parametrisering

Resultatet beror endast på kurvan som *geometriskt objekt*, inte på hur den parametriseras. Att byta parameter $t \to \tau(t)$ med $\tau'(t) > 0$ ger samma värde, så länge orientering och spår bevaras.

Praktisk konsekvens

Välj den parametrisering som ger snyggast räkning — du behöver inte oroa dig för att svaret ska bero på valet.

---

4. Användning

- **Längd** av kurva: $f \equiv 1$ ger $\int_C ds = \text{längd}(C)$.
- **Massa** av tråd med (linjär) densitet $\rho(x, y)$: $m = \int_C \rho\, ds$.
- **Masscentrum** av tråden: $\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\, \rho\, ds$ etc.
- **Medelvärde** av f längs kurvan: $\bar{f} = \frac{1}{\text{längd}(C)} \int_C f\, ds$.

---

5. Exempel

Exempel 1 — längden av en halvcirkel (sanity check) >

Exempel 2 — massa av vajer med inhomogen densitet

Exempel 3 — medelvärde av höjd över en spiral

---

6. Metodik — steg för steg

Hur man räknar $\int_C f\,ds$

1. **Parametrisera kurvan** C med $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$. Välj den parametrisering som gör räkningarna minst smärtsamma.
2. **Räkna farten** $\|\vec{r}\,'(t)\|$.
3. **Uttryck integranden** f längs kurvan: $f(\vec{r}(t))$.
4. **Beräkna enkelintegralen** $\int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$.
5. **Sanity-check.** För $f \equiv 1$ ska du få längden av C.

Vanliga fallgropar

- Glömt $\|\vec{r}\,'(t)\|$ — utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Felaktig t-intervall som täcker kurvan flera gånger eller bara delvis.
- Räknat $\int f(t)\,dt$ istället för $\int f(\vec{r}(t))\,ds$ — funktionsvärdet *i punkten*, inte i parametern.

Läsning

- 16.3 Line Integrals

Se även

- Kurvintegraler av vektorfält
- Parametriserade kurvor

- Båglängd och rotationsarea

Resurser

- Khan Academy: Line integrals
- Wikipedia: Line integral