Kryssprodukt

Jun 12, 2026, 7 min read

#linjär-algebra #vektorrum

1. Kryssprodukt (vektorprodukt)

> 3B1B: Cross products · 3B1B: Cross products pt. 2

Kryssprodukten finns enbart i $\mathbb{R}^3$. Man kan se $\mathbb{R}^2$ som en delmängd av $\mathbb{R}^3$ genom att sätta $z = 0$, dvs. $(x, y, 0)$.

1.1 Syfte

Givet ett plan på parameterform $\vec{x} = \vec{x}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ ger kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ en normalvektor som är ortogonal mot båda riktningsvektorerna.

1.2 Definition

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, \;\; u_3v_1 - u_1v_3, \;\; u_1v_2 - u_2v_1)}$$

Minnesregel: Skriv upp vektorerna under varandra. För varje komponent, täck den kolonnen och ta korsvis multiplikation av de kvarvarande — byt tecken på mittkomponenten.

Beräkna $(-1, 2, 3) \times (2, -6, 1)$ ›

Alternativ metod — determinantformen ›

1.3 Sats

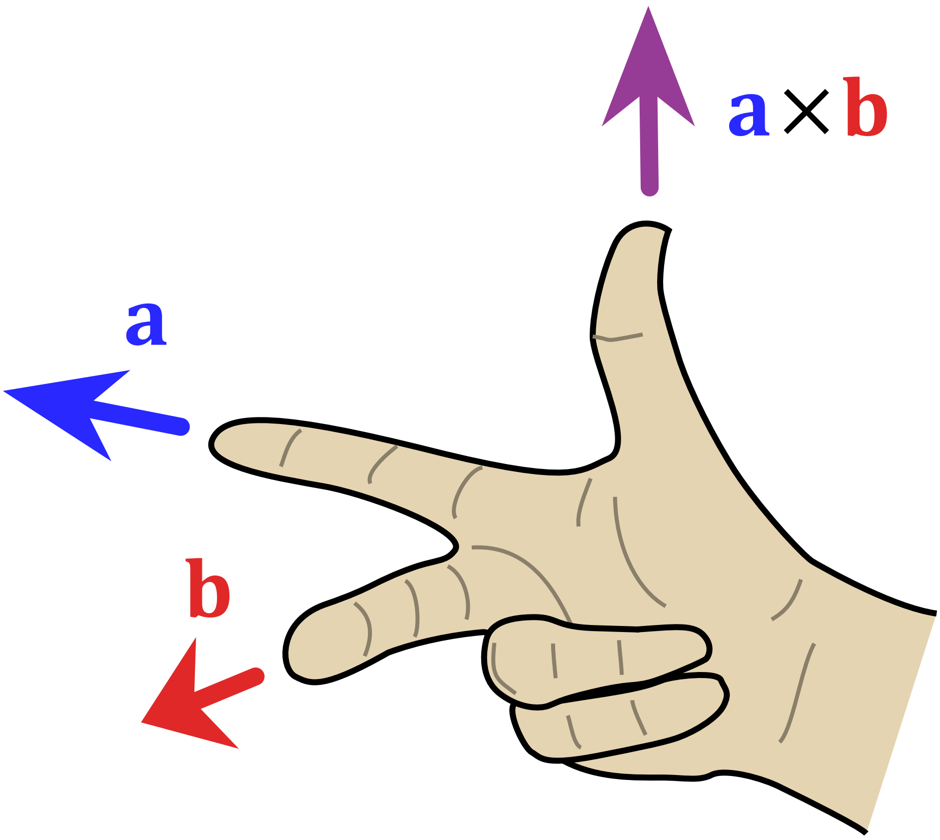
$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \implies \vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v}) \text{ och } \vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$$

Bevis: $(u_1, u_2, u_3) \bullet (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$

Varje term tar ut sig. Analogt för $\vec{v}$.

---

2. Räkneregler för kryssprodukt



> **Högerhandsregeln:** Bilden illustrerar högerhandsregeln för kryssprodukt mellan två vektorer **a** och **b**. När du formar en högerhand som visas:
>
> - **Pekfingret** (blå pil) pekar i riktning mot vektor **a**
> - **Långfingret** (röd pil) pekar i riktning mot vektor **b**
> - **Tummen** (lila pil) visar då riktningen på kryssproduktsvektorn **a × b**

> Kryssproduktsvektorn **a × b** blir alltså vinkelrät mot både **a** och **b**, och dess riktning bestäms av högerhandsregeln. Om du vänder på ordningen till **b × a** får du motsatt riktning (tummen pekar nedåt istället).

- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ – **ej kommutativ** (antikommutativ)
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ – distributiv
- $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

---

3. Lagranges identitet

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

---

4. Geometriska egenskaper

Givet två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ och $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = arean av parallellogrammet
- Riktning enligt **högerhandsregeln**

---

5. Exempel: Area av triangel

Bestäm arean av triangeln med hörnen $A = (1, 0, 3)$, $B = (-2, 1, -1)$, $C = (1, 1, 2)$.

Lösning: $\vec{AB} = B - A = (-3, 1, -4)$ $\vec{AC} = C - A = (0, 1, -1)$

$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

---

6. Trippelskalärprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Kan beräknas som en determinant:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

---

7. Satser: Geometrisk tolkning av determinanter

> 3B1B: The determinant

7.1 Area av parallellogram i $\mathbb{R}^2$

$$\text{Area} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

7.2 Volym av parallellepiped i $\mathbb{R}^3$

$$\text{Volym} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

---

8. Avstånd mellan punkt och linje

Exempel: Avstånd från punkt till linje

---

9. Avstånd mellan två skeva linjer i $\mathbb{R}^3$

Två linjer är **skeva** om de varken skär varandra eller är parallella (endast möjligt i 3D).

Exempel: Avstånd mellan två skeva linjer

10. Avstånd mellan punkt och plan

Exempel: Plan genom tre punkter + avstånd

Kryssprodukt - Jämn permutation

Läsning

- 10.3 The Cross Product in 3-Space

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Cross products (kap 10) — vad kryssprodukten betyder geometriskt
- 3Blue1Brown: Cross products in the light of linear transformations (kap 11) — djupare förståelse via determinanter
- 3Blue1Brown: Dot products and duality (kap 9) — skalärprodukt som kontrast
- 3Blue1Brown: The determinant (kap 6) — area och volym som determinant

Interaktiva verktyg

- GeoGebra: Cross Product Visualisation 3D — roterbar 3D-visualisering
- GeoGebra: Cross Product and Area Visualization — parallellogram-area

Wikipedia

- Cross product
- Triple product
- Parallelepiped
- Line (geometry) — Parametric form
- Plane (geometry)

Fördjupning

- Immersive Linear Algebra — Chapter 2: Vectors