

Kontinuerliga stokastiska variabler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #grundbegrepp

Kurs: S0008M Förkunskaper: Stokastisk variabel, Integraler

En kontinuerlig stokastisk variabel kan anta alla värden i ett intervall, och sannolikheten för ett enskilt värde är därför noll. I stället beskrivs fördelningen av en **frekvensfunktion**, där sannolikheten för ett intervall ges av arean under kurvan.

☰ Exempel 1 – väntetid på tunnelbanan

En person anländer till en tunnelbanestation. Tågen går var tionde minut, men personen har varken tidtabell eller klocka. Låt ξ vara väntetiden tills tåget avgår.

Då gäller att $0 \leq \xi < 10$, och alla värden i intervallet $[0, 10)$ kan antas.

1. Sannolikheten för ett enskilt värde är noll

För en kontinuerlig stokastisk variabel gäller

$$P(\xi = x) = 0 \quad \text{för alla } x$$

Vi kan alltså inte använda sannolikhetsfunktionen $P(\xi = x)$, som vi använde för att beskriva diskreta fördelningar, se **Sannolikhetsfunktion**. Det finns oändligt många utfall, och därför går det inte att tilldela varje enskilt utfall ett sannolikhetstal skilt från noll.

2. Frekvensfunktionen

I stället integrerar vi en frekvensfunktion f över det intervall vi är intresserade av:

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Följande gäller:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Definitionen, egenskaperna och sambandet med fördelningsfunktionen finns samlade i noten om frekvensfunktionen — där bor också den inramade formeln.

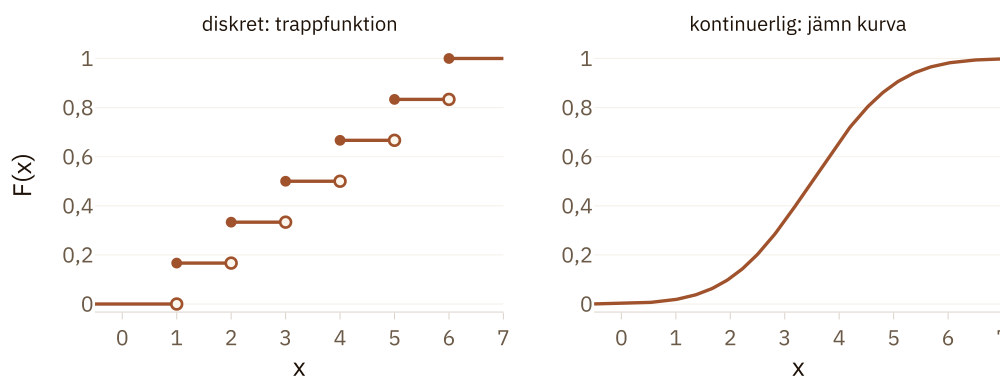
Olikheterna spelar ingen roll

För en kontinuerlig stokastisk variabel kan man slarva med $<$ och $\leq$, eftersom ändpunkterna var för sig har sannolikhet noll:

$$P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b)$$

3. Fördelningsfunktionen

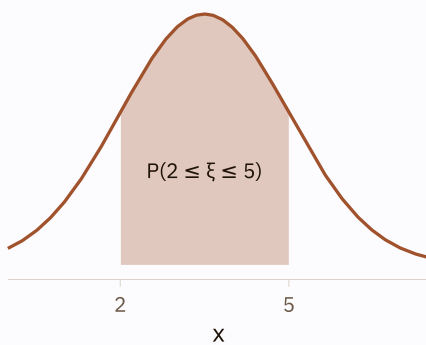
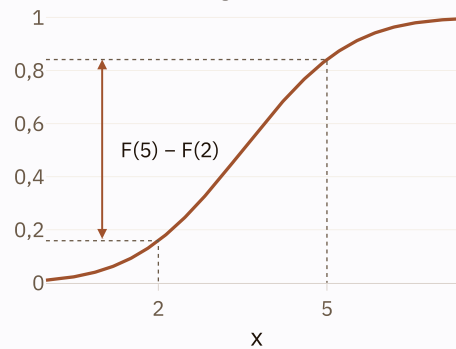
Diskreta fördelningar ger en trappfunktion, medan $F(x)$ för en kontinuerlig fördelning är en jämn kurva.



“Om man har fördelningsfunktionen är livet underbart” — Adam

Exempel 2 — sannolikhet ur fördelningsfunktionen

Vi har en kontinuerlig fördelning och söker sannolikheten att ξ hamnar mellan 2 och 5.

frekvensfunktionen $f(x)$: sannolikheten är areanfördelningsfunktionen $F(x)$ **Lösning**

Arean under frekvensfunktionen mellan 2 och 5 är precis det som F hunnit växa på samma sträcka:

$$P(2 \leq \xi \leq 5) = P(\xi \leq 5) - P(\xi \leq 2) = \boxed{F(5) - F(2)}$$

4. Tre vanliga kontinuerliga fördelningar

Rektangelfördelning

En fördelning som används när alla värden i ett intervall är lika sannolika.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{för } a \leq x \leq b, \quad f(x) = 0 \quad \text{för övriga } x$$

Alla delintervall med samma längd är lika sannolika: $P(c \leq \xi \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$ för $a \leq c \leq d \leq b$.

Fördelningen kallas också likformig fördelning, och är den kontinuerliga motsvarigheten till den **diskreta likformiga fördelningen**.

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad V(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialfördelning

Det som redan har hänt ändrar inte fördelningen för den återstående väntetiden — till exempel vid radioaktivt sönderfall.

$$\xi \in \text{Exp}(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$P(\xi > t + h \mid \xi > t) = P(\xi > h)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{för } x \geq 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{för } x < 0$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Mer i [Exponentialfördelning](#).

Normalfördelning

Den mest kända av alla fördelningar, klockformad och symmetrisk kring μ :

$$\xi \in N(\mu, \sigma), \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

Andra parametern är standardavvikelsen σ , inte variansen. Fördelningsfunktionen saknar sluten form och slås upp i tabell; se [Normalfördelning](#).

5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 6, övning 8 – Plats för en bil till?

På en gatstump av längden 13 m parkeras slumpmässigt en bil av längden 5 m. Vad är sannolikheten att ytterligare en bil av samma längd får plats? Vilka antaganden gör du?

Lösning

Antaganden. Båda bilarna är exakt 5 m långa, och den första bilen ställs "på måfå": alla lägen där den rymms är lika sannolika.

Modell. Låt ξ = avståndet från gatstumpens början till bilens bakre ände. Bilen upptar $[\xi, \xi + 5]$ och ska rymmas inom $[0, 13]$, så $0 \leq \xi \leq 8$. Antagandet ger en rektangelfördelning på $[0, 8]$:

$$f(x) = \frac{1}{8}, \quad 0 \leq x \leq 8, \quad f(x) = 0 \text{ annars}$$

När får en bil till plats? Antingen före den första bilen, vilket kräver $\xi \geq 5$, eller efter den, vilket kräver $13 - (\xi + 5) \geq 5$, alltså $\xi \leq 3$. De två fallen är disjunkta:

$$P(\text{plats}) = P(0 \leq \xi \leq 3) + P(5 \leq \xi \leq 8) = \int_0^3 \frac{1}{8} dx + \int_5^8 \frac{1}{8} dx = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{0,75}$$

Rimlighetskontroll. Den första bilen blockerar bara när den står i mitten, $3 < \xi < 5$, alltså en fjärdedel av det möjliga intervallet.

Uppgiften (Vännman 4.12) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och svaret stämmer med det.

Se även

- Stokastisk variabel
- Frekvensfunktion
- Fördelningsfunktion
- Exponentialfördelning
- Median och kvantiler
- Väntevärde
- Varians och standardavvikelse
- Integraler

Resurser

- [Khan Academy: Continuous random variables](#)
- [Wikipedia: Kontinuerlig sannolikhetsfördelning](#)