

Konfidensintervall

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #metod

Kurs: S0008M Förkunskaper: Punktskattning, Normalfördelning

Ett konfidensintervall är ett intervall, beräknat ur stickprovet, som med en angiven konfidensgrad täcker den okända parametern. Konfidensgraden avser metoden och inte det enskilda intervallet: upprepade stickprov ger intervall som i exempelvis 95 % av fallen innehåller det sanna värdet.

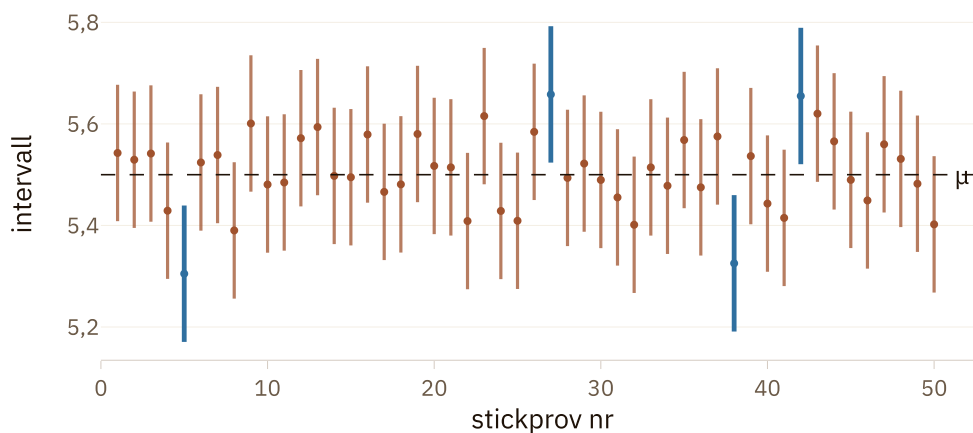
1. Definitionen

Ett **konfidensintervall** I_θ för parametern θ med **konfidensgrad** $1 - \alpha$ är ett intervall vars gränser är stickprovsvariabler, konstruerat så att

$$P(\theta \in I_\theta) = 1 - \alpha$$

Sannolikheten gäller *innan* vi har observerat: gränserna är slumpmässiga, θ är fix. När vi sätter in de observerade värdena får vi ett tal-intervall, och det antingen innehåller θ eller inte.

50 stickprov, 90 %-intervall: 46 täcker μ , 4 missar



Figuren visar 50 stickprov från samma fördelning, vart och ett med sitt 90 %-intervall. De flesta täcker det sanna μ ; ungefär vart tionde missar. Vi vet aldrig om just vårt intervall är ett av de som missar — konfidensgraden säger hur ofta metoden lyckas.

2. Härledning: μ i $N(\mu, \sigma)$ med känt σ

Anta att $\xi_1, \dots, \xi_n$ är oberoende och $N(\mu, \sigma)$, med σ känd. Den bästa punktskattningen är $\mu^* = \bar{\xi}$, och $\bar{\xi} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$. Standardisera:

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1)$$

Med kvantilen $\lambda_{\alpha/2}$, där $P(\eta > \lambda_{\alpha/2}) = \alpha/2$ för $\eta \in N(0, 1)$, gäller

$$P(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Lös ut μ ur olikheterna:

$$P(\bar{\xi} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Ersätt $\bar{\xi}$ med det observerade $\bar{x}$:

$$I_\mu = [\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Konfidensgrad	90 %	95 %	99 %
$\lambda_{\alpha/2}$	1,6449	1,9600	2,5758

3. Vad bestämmer intervallets bredd?

Intervallets bredd är $2\lambda_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$. Allt annat lika:

Ändring	Effekt på bredden
högre konfidensgrad	större $\lambda_{\alpha/2}$ — bredare
större spridning σ	bredare
fler observationer n	smalare , som $1/\sqrt{n}$

⚠ Säkerhet kostar precision

Ett 100 %-intervall finns alltid — hela reella axeln — men säger ingenting. Konfidensgraden och bredden står i motsats till varandra, och det enda sättet att få både hög säkerhet och ett smalt intervall är fler observationer.

4. Välj rätt metod

Tre metoder för läget i en fördelning, beroende på vad vi vet i förväg:

Förutsättning	Intervall	Not
Kontinuerlig fördelning, inget mer	$[\xi_{(k+1)}, \xi_{(n-k)}]$ för medianen	Teckenintervall
Normalfördelning, σ känd	$\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$	denna not
Normalfördelning, σ okänd	$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) s / \sqrt{n}$	t-fördelningen

Jämförelser mellan två metoder eller grupper leder vidare till [Stickprov i par](#) och [Två stickprov](#).

🔗 Tolka intervallet i ord

Ett svar är inte klart förrän intervallet är tolkat: "Med 95 % säkerhet ligger den förväntade halten mellan 0,11 och 0,39." Vid jämförelser: ingår 0 i intervallet för skillnaden kan vi inte påvisa någon skillnad.

⚠ Vanliga fel

- **Fel kvantil.** Ett tvåsidigt intervall med konfidensgrad $1 - \alpha$ använder $\lambda_{\alpha/2}$; för 95 % är det 1,96, inte 1,645.
- **Tolkning.** " μ ligger i intervallet med sannolikhet 95 %" är fel efter observationen; det är *metoden* som träffar i 95 % av fallen.
- **σ känd eller skattad.** Har σ skattats ur samma data gäller [[t-fördelningen|t-intervallet]].

5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 11, övning 3 och 4 (Vännman 8.9) – Halten av ett ämne

Halten (%) av ett visst ämne i en råvara mäts sex gånger. Mätvärdena kan betraktas som observationer från $N(\mu, \sigma)$ med $\sigma = 0,2$ känd:

5,68 5,58 5,98 6,30 4,93 4,98

a) Härled och beräkna ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad 0,90. Gå igenom stegen: fördelningen för ξ_i , bästa punktskattningen av μ , intervallskattningen, och till sist insättning av observationerna.

b) (Övning 4.) Är det troligt att halten μ är 6,0 %?

Lösning

Modell. ξ_i = mätvärde nr i , $\xi_i \in N(\mu, 0,2)$, $i = 1, \dots, 6$, oberoende.

Punktskattning. $\mu^* = \bar{\xi} \in N(\mu, 0,2/\sqrt{6})$. Observerat: $\bar{x} = 5,575$.

Intervallskattning. Vi söker a så att $P(\bar{\xi} - a < \mu < \bar{\xi} + a) = 0,90$:

$$0,90 = P\left(-\frac{a}{\sigma/\sqrt{6}} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{6}} < \frac{a}{\sigma/\sqrt{6}}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma/\sqrt{6}}\right) - 1$$

Alltså $\Phi(a/(\sigma/\sqrt{6})) = 0,95$, så $a/(\sigma/\sqrt{6}) = \lambda_{0,05} = 1,6449$ och

$$a = 1,6449 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{6}} \approx 0,134$$

a)

$$I_\mu = [5,575 - 0,134; 5,575 + 0,134] = \boxed{[5,44; 5,71]}$$

Med 90 % säkerhet ligger den förväntade halten mellan 5,44 och 5,71 %.

På räknaren. menu → Statistics → Confidence Intervals → z Interval med **Stats:** $\sigma = 0.2$, $\bar{x} = 5.575$, $n = 6$, **C Level** = 0.9 .

b) 6,0 ingår inte i intervallet. Det är därför **inte troligt** att $\mu = 6,0$ % — metoden ger intervall som missar μ bara i 10 % av fallen.

Facit (övning 4): Nej, eftersom 6 inte ingår i intervallet. Intervallet stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 11, övning 5 — Vad påverkar bredden?

Utgå från intervallet i övning 3 ($\sigma = 0,2$, $n = 6$, konfidensgrad 90 %). Hur påverkas intervallet av

- a) konfidensgraden — vad händer om den blir 80 %? 99 %?
- b) spridningen — vad händer om $\sigma = 0,4$? $\sigma = 0,1$?
- c) antalet mätvärden — vad händer om $n = 10$? $n = 4$?

Lösning

Bredden är $2\lambda_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$; i utgångsläget $2 \cdot 0,134 = 0,269$.

Ändring	Bredd
80 % ($\lambda = 1,2816$)	0,209
99 % ($\lambda = 2,5758$)	0,421
$\sigma = 0,4$	0,537
$\sigma = 0,1$	0,134
$n = 10$	0,208
$n = 4$	0,329

a) Ökad konfidensgrad ger **bredare** intervall.

b) Ökad standardavvikelse ger **bredare** intervall — bredden är proportionell mot σ .

c) Fler mätvärden ger **smalare** intervall, men bara som $1/\sqrt{n}$.

Facit: a) ökad konfidensgrad ger bredare intervall, b) ökad standardavvikelse ger bredare intervall, c) ökad stickprovsstorlek ger smalare intervall – allt annat lika.

≡ Lektion 12, övning 1 – Känd standardavvikelse

Observationerna nedan kan betraktas som observationer från $N(\mu, \sigma)$. Anta att $\sigma = 0,2$ är känd i förväg. Beräkna ett 95 % konfidensintervall för μ och tolka det i ord.

0,5 0,2 0,3 -0,2 0,3 0,3 0,4 0,2

Lösning

Modell. $\xi_i \in N(\mu, 0,2), i = 1, \dots, 8$, oberoende.

$\bar{x} = 2,0/8 = 0,25$ och $\lambda_{0,025} = 1,96$:

$$I_\mu = [0,25 \mp 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{8}}] = [0,25 \mp 0,139] = [0,11; 0,39]$$

Tolkning. Med 95 % säkerhet ligger det förväntade värdet μ mellan 0,11 och 0,39.

Samma data med σ okänd finns i **t-fördelningen**.

På räknaren. z Interval med **Data** (listan med de åtta värdena), $\sigma = 0.2$, **C Level** = 0.95.

Facit: [0,11; 0,39].

Se även

- Punktskattning
- t-fördelningen
- Teckenintervall

- Stickprov i par
- Två stickprov
- Konfidensintervall och hypotesprövning

Resurser

- [Khan Academy: Confidence intervals](#)[↗]
 - [Wikipedia: Konfidensintervall](#)[↗]
-
-