

Klassiska sannolikhetsdefinitionen

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Utfallsrum och händelser

Om alla utfall i ett ändligt utfallsrum är lika sannolika ges en händelses sannolikhet av antalet gynnsamma utfall dividerat med antalet möjliga. Definitionen förutsätter alltså symmetri och duger inte när utfallen har olika sannolikhet.

1. Definitionen

Antag att **utfallsrummet** Ω består av m möjliga utfall och att alla är lika sannolika. Om g av dem är **gynnsamma**, det vill säga medför händelsen A , så är

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

Två villkor

1. Ändligt många utfall m .
2. Alla utfall lika sannolika.

Antalet pulser från ett radioaktivt preparat under 5 sekunder har utfallsrummet $\{0, 1, 2, \dots\}$, alltså oändligt många utfall. Där fungerar definitionen inte, och vi får i stället skatta sannolikheten ur relativa frekvenser.

2. Att räkna g och m

Hela svårigheten i en uppgift ligger i att **räkna** g och m . Två verktyg räcker långt:

- **Multiplikationsprincipen** räknar **ordnade** val – “först en, sedan en till”.
- **Binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$ räknar val **utan hänsyn till ordning**.

⚠ Välj ett sätt och håll fast vid det

Samma problem kan lösas både **med** och **utan** hänsyn till ordning, men g och m måste räknas på samma sätt. Att ta m som ordnade val och g som oordnade ger fel svar.

3. Dragning ur en urna

Den vanligaste tillämpningen: en låda med N föremål, varav a är av en viss sort ("defekta") och $N - a$ av en annan. Vi drar n utan återläggning och frågar efter sannolikheten att få exakt k av den första sorten. Utan hänsyn till ordning är

$$m = \binom{N}{n}, \quad g = \binom{a}{k} \binom{N-a}{n-k}$$

där g följer av multiplikationsprincipen: först väljer vi vilka k av de a defekta, sedan vilka $n - k$ av de $N - a$ felfria. Samma resonemang blir senare den **hypergeometrisk fördelningen**.

4. Lösta lektionsuppgifter

☰ Lektion 1, övning 1 – Tolv lappar i en låda

I en låda finns tolv lappar, numrerade från 1 till 12. Vi drar en lapp slumpmässigt. Definiera utfallsrummet och bestäm, med den klassiska sannolikhetsdefinitionen, sannolikheten att vi drar en lapp med nummer fyra eller lägre. Vilken händelse har sannolikheten beräknats för, och vilka förutsättningar krävs för att definitionen ska få användas?

Lösning

Utfallsrum. $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$, där till exempel talet 7 står för att vi drar lappen med siffran 7. Alltså $m = 12$.

Händelse. $A = \text{"lapp med nummer fyra eller lägre"}$, formellt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, så $g = 4$.

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Förutsättningar. Ändligt många utfall som alla kan antas lika sannolika — vilket de är om lapparna är likadana och dragningen görs på måfå.

Facit: 1/3.

≡ Lektion 1, övning 3 (Vännman 2.1) — Defekta muttrar

Bland 10 muttrar finns 4 defekta. Vi tar 4 muttrar på måfå utan återläggning. Vad är sannolikheten att vi får

- a) alla 4 defekta,
- b) först 2 defekta och sedan 2 korrekta,
- c) exakt 2 defekta?

Vad blir g och m i varje fall?

Lösning

a) Ordningen spelar ingen roll. $m = \binom{10}{4} = 210$ och bara ett urval består av alla fyra defekta: $g = \binom{4}{4} = 1$.

$$P = \frac{1}{210} \approx \boxed{0,0048}$$

b) Här frågar vi efter en **ordning**, så vi räknar ordnade val. $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Gynnsamt: två defekta först ($4 \cdot 3$ sätt) och sedan två korrekta ($6 \cdot 5$ sätt), alltså $g = 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 360$.

$$P = \frac{360}{5040} = \frac{1}{14} \approx \boxed{0,071}$$

c) Ordningen spelar ingen roll igen. Välj 2 av de 4 defekta och 2 av de 6 korrekta: $g = \binom{4}{2}\binom{6}{2} = 6 \cdot 15 = 90$, och $m = 210$.

$$P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \approx \boxed{0,429}$$

Rimlighetskoll. b) är en av $\binom{4}{2} = 6$ lika sannolika ordningar för två defekta och två korrekta, så $6 \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$ ska vara svaret i c). Det stämmer.

På räknaren. `nCr(4,2)*nCr(6,2)/nCr(10,4)` ger $\frac{3}{7}$ exakt; `ctrl + enter` ger närmevärdet.

Svar i boken (2:a uppl., 2.1): a) 0,0048, b) 0,071, c) 0,429.

☰ Lektion 1, övning 6 (Vännman 2.2) – Glödlampor

I en låda ligger 15 glödlampor, varav 5 är defekta. Vi tar 5 lampor på måfå utan återläggning. Beräkna sannolikheten att vi får

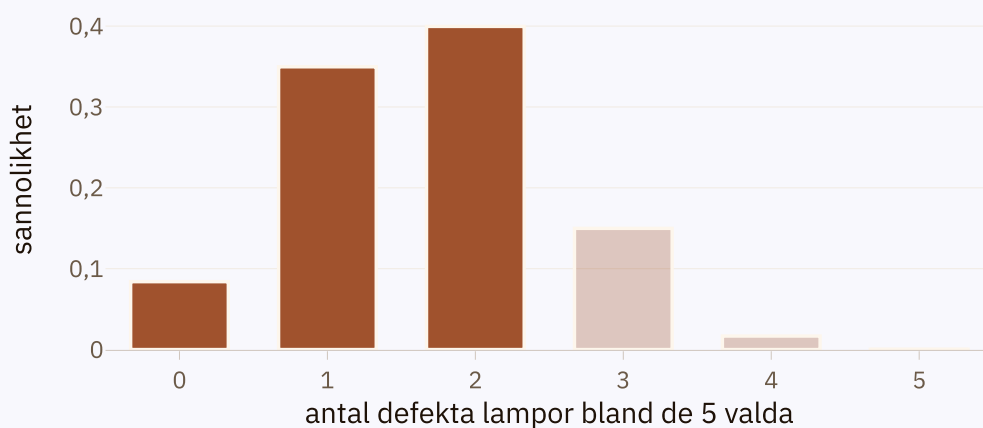
- a) ingen defekt lampa, b) exakt 1 defekt, c) exakt 2 defekta,
d) högst 2 defekta, e) minst 3 defekta, f) minst 2 defekta.

Vad blir g och m ?

Lösning

Ordningen spelar ingen roll, så $m = \binom{15}{5} = 3003$ i alla deluppgifter. Att få exakt k defekta ger $g = \binom{5}{k} \binom{10}{5-k}$, enligt avsnitt 3. Figuren visar alla sex sannolikheterna; d) och e) delar upp dem i två komplementära händelser.

15 lampor, 5 defekta, 5 dras utan återläggning
 högst 2 defekta: $834/1001 \approx 0,833$  minst 3 defekta: $167/1001 \approx 0,167$



$$\text{a) } P = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{5}}{\binom{15}{5}} = \frac{252}{3003} = \boxed{\frac{12}{143}} \approx 0,084$$

$$\text{b) } P = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{4}}{\binom{15}{5}} = \frac{5 \cdot 210}{3003} = \boxed{\frac{50}{143}} \approx 0,350$$

$$\text{c) } P = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{10 \cdot 120}{3003} = \boxed{\frac{400}{1001}} \approx 0,400$$

d) "Högst 2" är 0, 1 eller 2 defekta. De tre händelserna är disjunkta, så vi kan summera a)–c):

$$P = \frac{12}{143} + \frac{50}{143} + \frac{400}{1001} = \boxed{\frac{834}{1001}} \approx 0,833$$

e) "Minst 3" är 3, 4 eller 5 defekta:

$$P = \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{2} + \binom{5}{4}\binom{10}{1} + \binom{5}{5}\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}} = \frac{450 + 50 + 1}{3003} = \boxed{\frac{167}{1001}} \approx 0,167$$

f) "Minst 2" är komplementet till "högst 1", alltså

$$P = 1 - \left(\frac{12}{143} + \frac{50}{143} \right) = \boxed{\frac{81}{143}} \approx 0,566$$

Rimlighetskontroll. "Högst 2" och "minst 3" är komplement: $\frac{834}{1001} + \frac{167}{1001} = 1$.

På räknaren. d) i ett steg med summamallen: $\Sigma(\text{nCr}(5, k) * \text{nCr}(10, 5-k), k, 0, 2) / \text{nCr}(15, 5)$.

Svar i boken (2:a uppl., 2.2): a) 0,084, b) 0,350, c) 0,400, d) 0,833, e) 0,167, f) 0,566.

Stämmer också med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 2, övning 1 – Röda och svarta kulor

I en urna ligger 25 kulor, 10 röda och 15 svarta. Utan återläggning och på måfå väljs 5 kulor. Vad är sannolikheten att få

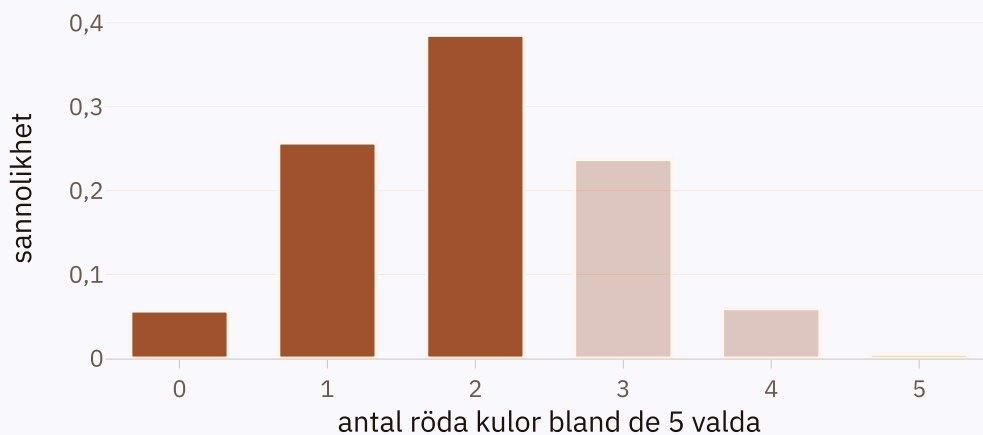
- a) exakt 2 röda kulor,
- b) högst 2 röda kulor,
- c) mer än 2 röda kulor i urvalet?

 Lösning

Ordningen spelar ingen roll, så $m = \binom{25}{5} = 53\,130$. Exakt k röda ger $g = \binom{10}{k} \binom{15}{5-k}$.

25 kulor, 10 röda, 5 dras utan återläggning

■ högst 2 röda $\approx 0,699$ ■ mer än 2 röda $\approx 0,301$



a)

$$P(\text{exakt } 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{45 \cdot 455}{53\,130} = \frac{20\,475}{53\,130} \approx \boxed{0,385}$$

b) 0, 1 eller 2 röda är disjunkta händelser, så sannolikheterna adderas:

$$P(\text{högst } 2) = \frac{\binom{10}{0} \binom{15}{5} + \binom{10}{1} \binom{15}{4} + \binom{10}{2} \binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{3003 + 13\,650 + 20\,475}{53\,130} = \frac{37\,128}{53\,130} \approx \boxed{0,699}$$

c) "Mer än 2" är komplementet till "högst 2":

$$P(\text{mer än } 2) = 1 - 0,699 = \boxed{0,301}$$

På räknaren. $\sum (nC_1(10, k) * nC_1(15, 5-k), k, 0, 2) / nC_1(25, 5)$ ger b) direkt.

Facit: a) 0,385, b) 0,699, c) 0,301.

Se även

- Utfallsrum och händelser
- Sannolikhetsmått
- Multiplikationsprincipen
- Binomialkoefficient
- Hypergeometrisk fördelning

Resurser

- [Wikipedia: Sannolikheter](#)