Kedjeregeln

Jun 12, 2026, 6 min read

#matematik #analys #flervariabelanalys #kedjeregeln #partiell-derivata

> **Kapitel:** 13.5–6 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator

---

1. Kedjeregeln – ett oberoende variabel

Situation

$z = f(x, y)$ där $x = x(t)$ och $y = y(t)$ – alltså beror z i slutändan bara på t.

Sats

Om f, $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara gäller:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

> **Tolkning**
>
> Formeln mäter den **observerade förändringshastigheten** hos f för en observatör som rör sig längs kurvan $(x(t),\ y(t))$. Termen $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$ är bidraget från rörelsen i x-led, och $\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ bidraget från y-led.

> **Glöm inte inre derivatan**
>
> Kedjeregeln gäller **alltid** när argumentet beror på t: $\frac{d}{dt}\sin(x(t)) = \cos(x(t)) \cdot x'(t)$ Fel: $\cos(x(t))$ Rätt: $\cos(x(t)) \cdot x'(t)$

Exempel — temperatur längs en kurva >

---

2. Kedjeregeln – två oberoende variabler

Situation

$z = f(x, y)$ där $x = x(s, t)$ och $y = y(s, t)$ — alltså beror z på de två oberoende variablerna s och t.

Sats

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Tolkning

Formlerna beskriver hur de partiella derivatorna **transformeras vid ett variabelbyte** $(x, y) \to (s, t)$. Används exempelvis vid byte till polära, cylindriska eller sfäriska koordinater.

Exempel — partiella derivator under variabelbyte >

---

3. Variabelträd

Ett **variabelträd** är ett grafiskt hjälpmedel för att hålla reda på beroenden och tillämpa kedjeregeln systematiskt.

Konstruktion

1. Skriv den slutliga variabeln (z) längst upp.
2. Rita grenar ner till de mellanliggande variablerna (x, y).

3. Rita grenar vidare ner till de oberoende variablerna (s, t).
4. Märk varje gren med motsvarande partiell (eller vanlig) derivata.

Schema

```
      z
     / \
    x   y
   /|   |\
  s  t  s  t
```

Kedjeregeln ges av: summera produkten av derivator längs varje väg från z till den önskade oberoende variabeln.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}}_{\text{via } x} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}}_{\text{via } y}$$

Allmänt variabelträd >

---

4. Differentierbarhet och linjär approximation

Definition — differentierbarhet

Funktionen $f(x, y)$ är **differentierbar** i punkten (a, b) om förändringen $\Delta f = f(a + \Delta x,\, b + \Delta y) - f(a, b)$ kan skrivas

$$\Delta f = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ när $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Linjär approximation

För en differentierbar funktion gäller den **linjära approximationen**:

$$\boxed{f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}$$

Geometriskt är detta **tangentplanet** till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

Differentialen

Differentialen df definieras som:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy}$$

Den används för att uppskatta **felet** i f till följd av små fel dx, dy i ingångsvariablerna.

Tillräckligt villkor för differentierbarhet >

Exempel — feluppskattning med differential >

---

5. Polära koordinater — variabelbyte med kedjeregeln

Koordinatbyte

Polära koordinater definieras av:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

Transformation av partiella derivator

Med kedjeregeln (fall 2) transformeras derivatorna av $f(x, y)$ till $f(r, \theta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$$

Kedjeregeln i “shorthand” för flervariabelfallet:

$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{x}\,'(t)$

Notera att det är **skalärprodukt** $(\cdot)$, inte kryssprodukt. Om kurvan $\vec{x}(t)$ ligger på en nivåyta $f = \text{konst}$ är hela derivatan 0, och då är $\vec{\nabla} f \perp \vec{x}\,'(t)$ — gradienten är normal till ytan.

Variabelträdet ser ut som:

```
       f
      / \
     x   y
    /|   |\
   r  θ  r  θ
```

Exempel — Laplaceoperatorn i polära koordinater >

Exempel — partiella derivator i polära koordinater >

Läsning

- 2.4 The Chain Rule
- 13.5 The Chain Rule

Se även

- Partiella derivator
- Gradient och riktningsderivata
- Funktioner av flera variabler

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: What is a partial derivative? — intuitiv introduktion till partiella derivator

- Khan Academy: Multivariable chain rule — steg-för-steg genomgång
- Professor Leonard: The Chain Rule for Functions of Multiple Variables — detaljerad genomgång med variabelträd

Interaktiva verktyg

- Desmos 3D — visualisera tangentplan och linjär approximation
- GeoGebra: Polar Coordinates — se koordinatbytet grafiskt
- Wolfram Alpha — beräkna partiella derivator och kedjeregeln symboliskt

Wikipedia

- Chain rule — Wikipedia
- Total derivative — Wikipedia
- Polar coordinate system — Wikipedia

Fördjupning

- Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*, avsnitt 13.5–13.6
- MIT OCW 18.02SC: Chain Rule — föreläsningsanteckningar och övningar