

Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #metod

Kurs: S0008M **Förkunskaper:** Flerdimensionella fördelningar, Fördelningsfunktion, Linjära funktioner av stokastiska variabler

Fördelningen för en icke-linjär funktion $\zeta = g(\xi_1, \dots, \xi_d)$ av stokastiska variabler tar vi fram i två steg: först fördelningsfunktionen $F_\zeta(z) = P(\zeta \leq z)$ som sannolikheten för ett område, sedan frekvensfunktionen genom derivering. När det inte går att räkna exakt kan vi i stället approximera väntevärde och varians genom linjärisering.

1. Fördelningsfunktionsmetoden

För **linjära funktioner** räcker räknereglererna för väntevärde och varians. För en godtycklig funktion $\zeta = g(\xi, \eta)$ behöver vi hela fördelningen, och den tar vi fram så här:

1. **Skriv händelsen som ett område.** $\{\zeta \leq z\} = \{(\xi, \eta) \in D_z\}$, där $D_z = \{(x, y) : g(x, y) \leq z\}$.
2. **Räkna sannolikheten.** $F_\zeta(z) = P((\xi, \eta) \in D_z)$ – en dubbelintegral av den **simultana frekvensfunktionen**, eller ett areaförhållande om fördelningen är likformig.
3. **Derivera.** $f_\zeta(z) = F'_\zeta(z)$.

Varför gå via F ?

$P(\zeta \leq z)$ är sannolikheten för ett *område*, och sådana kan vi räkna. Frekvensfunktionen $f_\zeta(z)$ är ingen sannolikhet i sig, så den går inte att få fram direkt. Samma knep fungerar i en dimension: för $\eta = \xi^2$ är $F_\eta(y) = P(-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y})$.

2. Summor: faltningsformeln

För $\zeta = \xi + \eta$ är D_z halvplanet under linjen $y = z - x$:

$$F_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy dx$$

Är ξ och η oberoende är $f(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$, och derivering ger **faltningsformeln**

$$f_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(z-x) f_{\eta}(x) dx$$

Summan av två oberoende rektangelfördelade variabler får på så sätt en triangelformad frekvensfunktion, och summan av n oberoende $\text{Exp}(\lambda)$ -variabler en Gammafördelning med frekvensfunktionen $\frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z}$, $z > 0$.

3. Avstånd och kvadrater

Avstånd från origo. Är (ξ, η) likformigt fördelad på enhetscirkelskivan och $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ är $\{\zeta \leq z\}$ en cirkelskiva med radie z , så

$$F_{\zeta}(z) = \frac{\pi z^2}{\pi} = z^2, \quad f_{\zeta}(z) = 2z, \quad 0 < z < 1$$

Frekvensfunktionen växer med z : det finns mer area långt ut än nära centrum.

Kvadrater. Är $\eta = \xi^2$ och ξ kontinuerlig ger steg 2 $F_{\eta}(y) = F_{\xi}(\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y})$ för $y > 0$, och kedjeregeln

$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_{\xi}(\sqrt{y}) + f_{\xi}(-\sqrt{y})), \quad y > 0$$

Med $\xi \in N(0, 1)$ blir detta χ^2 -fördelningen med 1 frihetsgrad. Summan av kvadraterna av k oberoende $N(0, 1)$ -variabler är χ^2 -fördelad med k frihetsgrader.

Det minsta och största värdet av flera variabler är ett eget viktigt fall, se [Max och min av stokastiska variabler](#).

4. Approximativt: Gauss approximationsformler

För en icke-linjär funktion av stokastiska variabler går väntevärde och varians i allmänhet inte att beräkna exakt. Vi linjäriserar då funktionen kring väntevärdena med en Taylorutveckling, vilket ger Gauss approximationsformler — grunden för felfortplantning.

För en variabel, med $\mu = E(\xi)$:

$$E(g(\xi)) \approx g(\mu), \quad V(g(\xi)) \approx (g'(\mu))^2 V(\xi)$$

och för oberoende $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$V(g(\xi_1, \dots, \xi_n)) \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_1, \dots, \mu_n) \right)^2 V(\xi_i)$$

Approximationen är bra när g är nästan linjär över det område där variablerna brukar hamna, alltså när standardavvikelserna är små.

Vanliga fel

- **Satt in direkt i frekvensfunktionen.** $f_{\zeta}(z)$ fås inte genom att sätta in g i f_{ξ} ; gå via $F_{\zeta}(z) = P(\zeta \leq z)$ och derivera.
- **Intervallen.** Området D_z kan byta form med z — summan av två $R(0, 1)$ har olika uttryck för $z < 1$ och $z > 1$. Ange också att $F_{\zeta} = 0$ under och 1 över värdemängden.
- **Bara ena roten.** För $\eta = \xi^2$ är $\{\eta \leq y\} = \{-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y}\}$ — båda rötterna ska med.
- **Gauss formler som exakta.** $E(g(\xi)) \approx g(\mu)$ är en approximation; likhet gäller bara när g är linjär.

5. Lösta lektionsuppgifter

Övningarna märkta *Kompendiet* kommer ur kompendiet om flerdimensionella fördelningar. Det saknar facit, så de är lösta två gånger oberoende av varandra.

Lektion 19, övning 1 — Total väntetid för två bussar

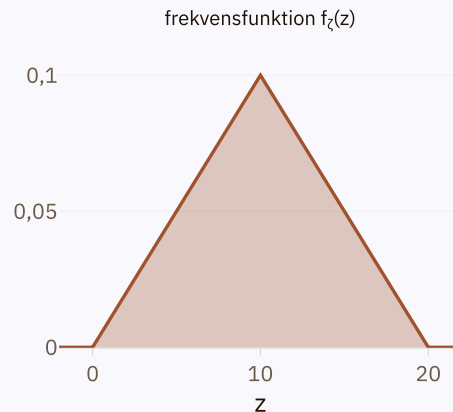
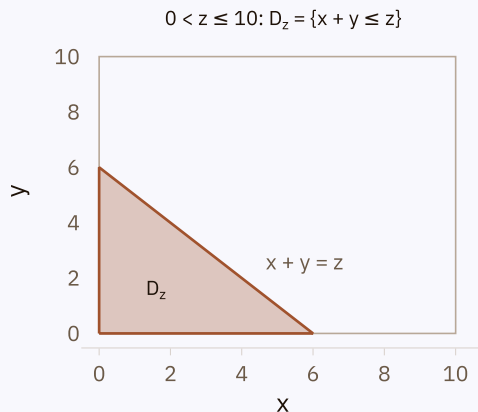
En person ska ta två bussar. Väntetiderna är oberoende och $R(0, 10)$ -fördelade. Låt ζ vara den totala väntetiden.

- Beräkna fördelningsfunktionen för ζ .
- Bestäm och skissa frekvensfunktionen för ζ .

Lösning

Simultan fördelning. Med ξ och η som väntetiderna är $f(x, y) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ på kvadraten $K = [0, 10] \times [0, 10]$, alltså likformig fördelning med $|K| = 100$. Sannolikheter blir areor delat med 100.

a) $\{\zeta \leq z\}$ är delen av kvadraten under linjen $x + y = z$.



- $0 < z \leq 10$: området är en triangel med kateterna z , arean $z^2/2$.
- $10 < z \leq 20$: komplementet är en triangel uppe till höger med kateterna $20 - z$.

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{z^2}{200}, & 0 < z \leq 10 \\ 1 - \frac{(20 - z)^2}{200}, & 10 < z \leq 20 \\ 1, & z > 20 \end{cases}$$

b) Derivera bit för bit:

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{z}{100}, & 0 < z \leq 10 \\ \frac{20 - z}{100}, & 10 < z \leq 20 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

En triangel med toppen vid $z = 10$ (högra panelen). Två oberoende likformiga väntetider ger alltså **inte** en likformig summa: värden nära mitten kan uppstå på många sätt, värden nära 0 eller 20 bara på ett.

Rimlighetskontroll. Triangelns area är $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{10}{100} = 1$.

Facit: $F_\zeta(z) = z^2/200$ för $0 < z \leq 10$ och $1 - (20 - z)^2/200$ för $10 < z \leq 20$; f_ζ är triangelformad med toppen i $z = 10$.

≡ Lektion 19, övning 3 – Partikel i ett klot

Positionen för en partikel relativt origo är likformigt fördelad på klotet med centrum i origo och radie $R > 0$.

- Antag $R = 1$. Vad är sannolikheten att partikeln befinner sig högst 0,35 från origo?
- Låt ζ vara partikelns avstånd från origo. Diskutera hur frekvensfunktionen för ζ borde se ut.
- Beräkna och skissa frekvensfunktionen för ζ för godtyckligt R . Bestäm även väntevärde och median för ζ .

Lösning

a) Likformig fördelning i tre dimensioner: sannolikheten är ett volymförhållande. $\{\zeta \leq 0,35\}$ är ett klot med radie 0,35:

$$P(\zeta \leq 0,35) = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 0,35^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3} = 0,35^3 \approx \boxed{0,043}$$

b) Sannolikheten att hamna i en liten kub är ungefär $f \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$, och f är konstant. Ett tunt skal på avståndet z har volymen ungefär $4\pi z^2 \, dz$, som växer med z . Frekvensfunktionen för ζ borde därför vara noll vid origo och växa ungefär som z^2 ut till R .

c) För $0 \leq z \leq R$ är $\{\zeta \leq z\}$ ett klot med radie z :

$$F_\zeta(z) = \frac{\frac{4}{3}\pi z^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{z^3}{R^3}, \quad f_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = \boxed{\frac{3z^2}{R^3}}, \quad 0 \leq z \leq R$$

Väntevärde:

$$E(\zeta) = \int_0^R z \cdot \frac{3z^2}{R^3} \, dz = \frac{3}{R^3} \cdot \frac{R^4}{4} = \boxed{0,750 R}$$

Median: $F_\zeta(m) = 0,5$ ger $m^3/R^3 = 0,5$, alltså

$$m = \sqrt[3]{0,5} R \approx \boxed{0,794 R}$$

Medianen ligger över väntevärdet eftersom fördelningen är vänsterskev: massan är samlad långt ut, med en lång svans in mot origo.

Facit: a) 0,042 — vi får 0,043, eftersom $0,35^3 = 0,042875$ och facit har kortat bort decimalerna i stället för att avrunda; c) $f_{\zeta}(z) = 3z^2/R^3$, $0 \leq z \leq R$, väntevärdet $0,750R$, median $0,794R$.

☰ Kompendiet, övning 1.4 — Högst 12 minuters väntan

En person ska ta två bussar. Väntetiderna är oberoende och $R(0, 10)$ -fördelade (minuter). Beräkna sannolikheten att den totala väntetiden blir högst 12 minuter.

Lösning

Det är fördelningsfunktionen från lektion 19, övning 1 ovan, i $z = 12$. Området $\{x + y \leq 12\}$ är hela kvadraten utom en triangel uppe till höger med kateterna $20 - 12 = 8$:

$$P(\zeta \leq 12) = 1 - \frac{8^2/2}{100} = 1 - 0,32 = \boxed{0,68}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Kompendiet, övning 1.5 — Summan av två $R(0, 1)$

Antag att $\xi_1 \in R(0, 1)$ och $\xi_2 \in R(0, 1)$ är oberoende. Beräkna fördelningsfunktionen och frekvensfunktionen för $\xi_1 + \xi_2$.

Lösning

Samma räkning som bussexemplet, med kvadraten $[0, 1] \times [0, 1]$ i stället för $[0, 10] \times [0, 10]$. Arean är 1, så sannolikheten är arean själv:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{z^2}{2}, & 0 < z \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2}, & 1 < z \leq 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \leq 1 \\ 2 - z, & 1 < z \leq 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Frekvensfunktionen är en triangel på $(0, 2)$ med toppen 1 i $z = 1$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 1.7 – Den ovane pilkastaren

En ovan pilkastare träffar en cirkulär tavla med radien 1, och träffpunkten är likformigt fördelad på tavlan. Låt ζ vara avståndet från träffpunkten till tavlans centrum.

- Bestäm variansen för ζ .
- Pilkastaren får $10 - 10\zeta$ poäng. Beräkna det förväntade antalet poäng på ett kast.

Lösning

Fördelningen för ζ är avståndet från origo i avsnitt 3: $f_{\zeta}(z) = 2z$ för $0 < z < 1$.

a)

$$E(\zeta) = \int_0^1 z \cdot 2z \, dz = \frac{2}{3}, \quad E(\zeta^2) = \int_0^1 z^2 \cdot 2z \, dz = \frac{1}{2}$$

$$V(\zeta) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{18}} \approx 0,056$$

b) Poängen är en linjär funktion av ζ :

$$E(10 - 10\zeta) = 10 - 10 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{10}{3}} \approx 3,3 \text{ poäng}$$

Det förväntade avståndet $2/3$ ligger närmare kanten än centrum, eftersom det finns mer area långt ut.

På räknaren. $\int (z \cdot 2 \cdot z, z, 0, 1)$ och $\int (z^2 \cdot 2 \cdot z, z, 0, 1)$ i en Calculator-sida.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 1.9 – Avstånd i tre dimensioner

Låt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ha en tredimensionell kontinuerlig fördelning (som i två dimensioner, men med trippelintegraler). Bestäm väntevärdet av $\zeta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ om

a) (ξ_1, ξ_2, ξ_3) är likformigt fördelad på klotet med centrum i origo och radien 1,

b) frekvensfunktionen är

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/a_0}, \quad a_0 = 5,2917720859 \cdot 10^{-11}$$

Den beskriver var väteatomens elektron befinner sig i förhållande till kärnan i grundtillståndet.

Lösning

a) Enligt lektion 19, övning 3 ovan, med $R = 1$, är $f_\zeta(z) = 3z^2$ på $(0, 1)$ och

$$E(\zeta) = \int_0^1 z \cdot 3z^2 dz = \boxed{\frac{3}{4}}$$

b) Frekvensfunktionen beror bara på avståndet r till origo. Ett tunt skal på avståndet r har volymen $4\pi r^2 dr$ (se **Sfäriska koordinater**), så

$$f_\zeta(r) = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}, \quad r > 0$$

Med substitutionen $t = 2r/a_0$ och $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$:

$$E(\zeta) = \int_0^{\infty} r \cdot \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 \cdot 3! = \boxed{\frac{3}{2} a_0} \approx 7,94 \cdot 10^{-11}$$

Samma teknik ger $\int_0^{\infty} f_{\zeta}(r) dr = \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \cdot 2! = 1$, en kontroll av att f verkligen är en frekvensfunktion. Elektronen befinner sig i genomsnitt 1,5 Bohrradier från kärnan.

På räknaren. b) $\int (r \cdot 4/a^3 \cdot r^2 \cdot e^{(-2 \cdot r/a)}, r, 0, \infty)$ med a odefinierad ger $3 \cdot a/2$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 2.4 – Brownsk rörelse

Låt ξ_1, ξ_2, ξ_3 vara oberoende, var och en $N(0, \sqrt{t})$. I en diffusionsmodell (Brownsk rörelse) är de koordinaterna för en mikroskopisk partikel vid tiden t . Beräkna sannolikheten att partikeln vid tiden $t = 1$ befinner sig högst 0,341 från origo.

Lösning

Till χ^2 . Vid $t = 1$ är $\xi_i \in N(0, 1)$, och enligt avsnitt 3 är $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ då χ^2 -fördelad med 3 frihetsgrader. Avståndet är högst 0,341 precis när kvadratsumman är högst $0,341^2$:

$$P(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \leq 0,341) = P(\chi^2(3) \leq 0,1163)$$

Tabellen. χ^2 -tabellen ger att 3 frihetsgrader har 1 % av massan under 0,115. Vårt 0,1163 ligger alldeles ovanför, så

$$P \approx \boxed{0,01}$$

Med räknaren blir det 0,0102.

På räknaren. $\chi^2 \text{Cdf}(0, 0.341^2, 3)$, under **menu** → **Statistics** → **Distributions** → $\chi^2 \text{Cdf}$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- [Max och min av stokastiska variabler](#)
- [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#)
- [Flerdimensionella fördelningar](#)
- [Fördelningsfunktion](#)
- [Sfäriska koordinater](#)

Resurser

- [Wikipedia: Convolution of probability distributions](#)
 - [Wikipedia: Propagation of uncertainty](#) — Gauss approximationsformler
-
-