

Heisenbergs osäkerhetsprincip

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #princip

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Komplementaritetsprincipen, Fraunhoferdiffraktion

Position och rörelsemängd kan inte båda bestämmas godtyckligt noga, och det är inte en fråga om mätinstrument utan en principiell gräns. Enkelspaltdiffraktionen visar kopplingen direkt: en smalare spalt ger mindre osäkerhet i y -läget men bredare mönster och därmed större osäkerhet i p_y — mindre Δp_y går bara att få genom att öka spaltbredden. Samma slags relation gäller mellan energi och tid, vilket sätter den naturliga linjebredden hos ett exciterat tillstånd.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Fysika: Fd3 (i formen $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h/4\pi$ och $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/4\pi$)

Formeln, symbol för symbol

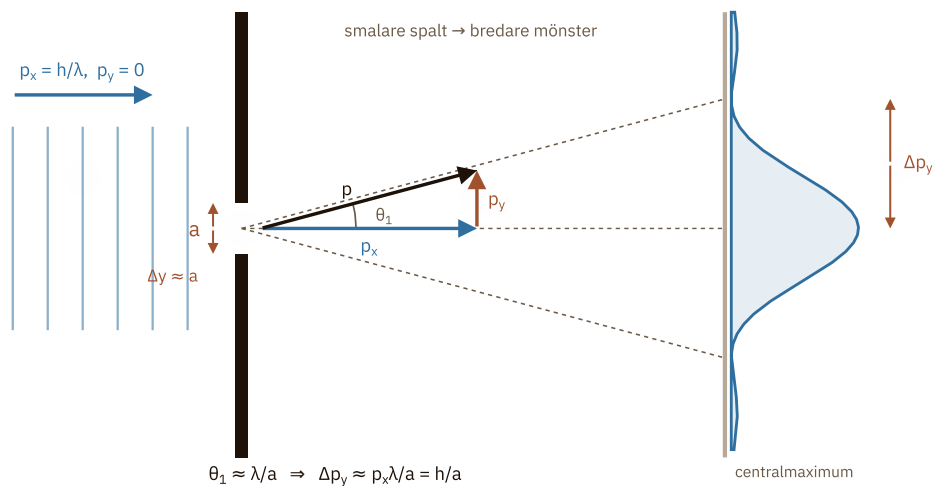
$$\underbrace{\Delta x}_{\text{osäkerhet i läge}} \underbrace{\Delta p_x}_{\text{osäkerhet i rörelsemängd}} \geq \underbrace{\frac{\hbar}{2}}_{\text{naturens nedre gräns}}$$
$$\underbrace{\Delta E}_{\text{oskärpa i energi}} \underbrace{\Delta t}_{\text{tillsfändets livstid}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Produkten av två osäkerheter kan aldrig bli mindre än $\hbar/2$: pressar vi ihop den ena måste den andra växa. Gränsen är en egenskap hos vågen själv, inte hos mätinstrumentet.

1. Enkelspalten ger relationen

Parallellt monokromatiskt ljus med rörelsemängden $p_x = h/\lambda$ faller in mot en spalt med bredden a . Före spalten är $p_y = 0$. Vi vet inte var i spalten en viss foton passerar, så lägesosäkerheten i y -led är ungefär a . Efter spalten sprids fotonerna i ett **diffraktionsmönster**, och en foton som hamnar i kanten

av centralmaximum har fått en rörelsemängd i y-led.



Enkelspalten som lägesmätning: fotonen passerade någonstans inom bredden a , så $\Delta y \approx a$. En foton mot kanten av centralmaximum har fått $p_y = p_x \tan \theta_1 \approx p_x \lambda/a$, och därmed blir $a \Delta p_y \approx h$.

Härledning av $a \Delta p_y \geq h$

Första minimum. För $\lambda \ll a$ ligger det vid den lilla vinkeln

$$\theta_1 \approx \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

Rörelsemängden i kanten av centralmaximum. Fotonens riktning ger

$$\frac{p_y}{p_x} = \tan \theta_1 \approx \theta_1$$

$$p_y = p_x \frac{\lambda}{a}$$

Spridningen. Fotonerna i centralmaximum har p_y mellan $-p_x \lambda/a$ och $+p_x \lambda/a$, så

$$\Delta p_y \geq p_x \frac{\lambda}{a}$$

Sätt in $\lambda = h/p_x$.

$$\Delta p_y \geq p_x \frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a}$$

$$a \Delta p_y \geq h$$

En smalare spalt ger mindre lägesosäkerhet men ett bredare mönster och därmed större osäkerhet i rörelsemängd. Relationen är grov, eftersom varken a eller Δp_y här är standardavvikelser.

2. Den skarpa formen

Måts osäkerheterna som standardavvikelser blir gränsen $\hbar/2$ i stället för h . Det är relationen i rutan överst, med

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Fysika: Te

Tre saker att hålla isär:

- **Varje riktning för sig.** $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$ och $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$. Osäkerheten i x säger ingenting om p_y .
- **Inte ett mätfel.** Gränsen gäller oavsett instrument. En detektor måste växelverka med partikeln och ändrar då dess rörelse.
- **All materia.** Relationen härleddes för fotoner, men elektroner och andra partiklar har också vågegenskaper och lyder samma gräns.

Uppskattning av rörelseenergi. En partikel som är instängd i ett område med storleken Δx har av symmetriskäl medelvärde $p_x = 0$, men spridningen är minst $\Delta p_x = \hbar/(2\Delta x)$. Rörelsemängdens storlek är alltså typiskt minst Δp_x , och den icke-relativistiska rörelseenergin blir

$$K \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2}$$

Ju trängre instängning, desto högre energi. För en elektron instängd i en atom ger uppskattningen några eV, alltså just atomära energier. Samma räkning förklarar varför elektroner inte faller in i kärnan: där skulle deras rörelseenergi bli enorm (se det första exemplet).

3. Vågpaket

En ren sinusvåg $A \sin(kx - \omega t)$ har en bestämd våglängd, och därmed en bestämd rörelsemängd och energi:

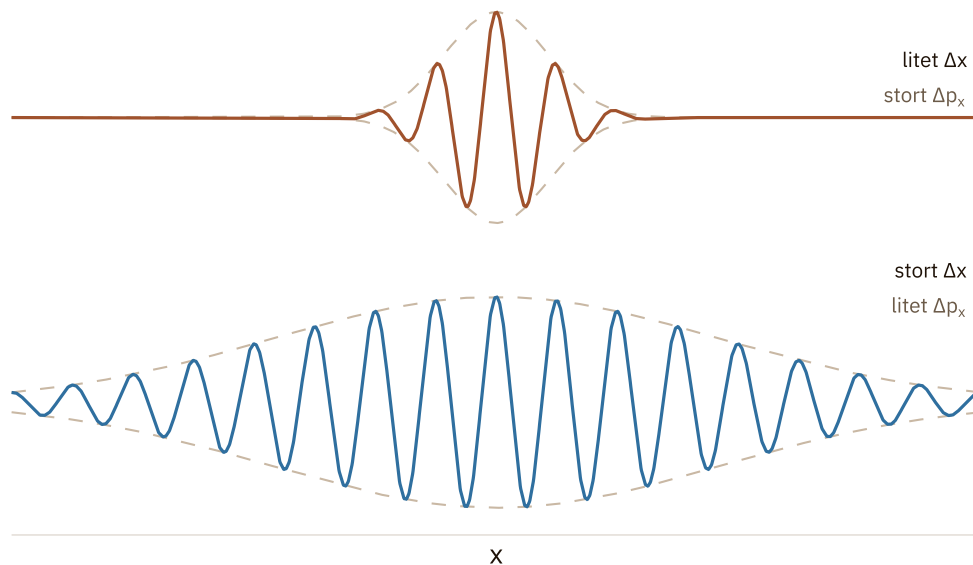
$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

$$E = hf = \hbar\omega$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi)

Då är $\Delta p_x = 0$. Men vågen har samma amplitud längs hela x-axeln, så Δx är oändlig. För att lokalisera partikeln måste vi lägga ihop vågor med olika k . Summan blir ett **vågpaket** som bara är stort i ett begränsat område, men nu ingår flera värden på p_x . Ju smalare paket, desto fler våglängder behövs.



Två vågpaket med samma medelvåglängd. Det smala (överst) är väl lokaliserat men byggs upp av ett brett band av våglängder, alltså stort Δp_x . Det breda (nederst) liknar en ren sinusvåg: litet Δp_x men stort Δx .

4. Energi och tid – naturlig linjebredd

Registreras vågpaketet på ett fast ställe blir samma resonans ett samband mellan tid och energi. En kort puls innehåller ett band av vinkelfrekvenser och därmed ett band av energier $\hbar\omega$. Den andra relationen i rutan gäller därför för varje tillstånd som bara finns under en tid Δt .

Ett exciterat atomtillstånd med medellivstiden τ har alltså en oskarp energi. Med $\Delta t = \tau$ blir den minsta osäkerheten

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau}$$

Grundtillståndet lever hur länge som helst och har skarp energi, så hela osäkerheten hamnar i den utsända fotonen och ger spektrallinjen en bredd (se [Linjespektrum](#)). Bredden i våglängd fås genom att derivera $E = hc/\lambda$:

$$\frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2} = -\frac{E}{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E}}$$

Det här är den **naturliga linjebredden**. Den är mycket liten, och i en verklig gas döljs den oftast av bredare effekter som **dopplerbreddning** och kollisioner mellan atomerna.

5. Bohrmodellen bryter mot principen

I **Bohrs modell** rör sig elektronen i en plan cirkelbana. Kallar vi planet för xy -planet gäller alltid $z = 0$ och $p_z = 0$, så $\Delta z \Delta p_z = 0 < \hbar/2$. Modellen kan därför inte vara en korrekt bild av elektronen, trots att den ger rätt energinivåer för väte. Det krävs en beskrivning som helt bygger på elektronens vågegenskaper, **Schrödingerekvationen**.

⚠ Vanliga fel

- **h i stället för $\hbar$.** Gränsen är $\hbar/2 = h/(4\pi)$. Fel konstant ger ett fel på en faktor 2π .
- **Fel komponenter paras.** Δx hör ihop med Δp_x , inte med Δp_y .
- **Relationen tolkas som ett mätfel.** Den är en egenskap hos tillståndet och gäller oavsett instrument.
- **Klassisk energi när $\Delta p c$ är stor.** Blir $\Delta p c$ jämförbar med mc^2 ger $p^2/2m$ fel svar. Använd $K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$.
- **Livstiden läggs på grundtillståndet.** Bredden kommer från det exciterade tillståndets ändliga livstid; grundtillståndet har skarp energi.

6. Lösta exempel

≡ Exempel – Proton och elektron i en atomkärna

En atomkärna har diametern 5,0 fm. Ta den som lägesosäkerheten Δx . (a) Uppskatta den minsta osäkerheten i rörelsemängd för en proton i kärnan och motsvarande rörelseenergi. (b) Gör samma uppskattning för en elektron. Jämför med elektronens viloenenergi 0,511 MeV och med kärnors bindningsenergies, som är några MeV per partikel.

 Lösning

Rörelsemängden. Den är densamma för båda partiklarna:

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-15}} = \boxed{1,05 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

a) Protonen. Icke-relativistiskt:

$$K = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_p} = \frac{(1,055 \cdot 10^{-20})^2}{2 \cdot 1,673 \cdot 10^{-27}} = 3,32 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \boxed{0,207 \text{ MeV}}$$

Det är långt under protonens viloeenergi, så den klassiska formeln håller, och energin ryms gott inom kärnans bindning.

b) Elektronen. Först pc :

$$pc = 1,055 \cdot 10^{-20} \cdot 2,998 \cdot 10^8 = 3,16 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 19,7 \text{ MeV}$$

Det är mycket mer än $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, så vi måste räkna relativistiskt:

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = \sqrt{19,7^2 + 0,511^2} - 0,511 \approx \boxed{19,2 \text{ MeV}}$$

Den klassiska formeln hade gett omkring 381 MeV, alltså helt fel. En elektron instängd i kärnan får en rörelseenergi långt över bindingsenergierna och kan inte hållas kvar där.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Lyman- α -linjens naturliga bredd

När en väteatom faller från det första exciterade tillståndet till grundtillståndet sänds Lyman- α -linjen ut med $\lambda = 121,6 \text{ nm}$. Det exciterade tillståndet har medellivstiden $1,60 \text{ ns}$. Bestäm den minsta energiosäkerheten, motsvarande frekvensbredd och linjens naturliga bredd i våglängd.

 Lösning

Energiosäkerheten. Med $\Delta t = \tau$:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-9}} = 3,30 \cdot 10^{-26} \text{ J} = \boxed{2,06 \cdot 10^{-7} \text{ eV}}$$

Frekvensbredden.

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3,30 \cdot 10^{-26}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = \boxed{4,97 \cdot 10^7 \text{ Hz}}$$

alltså ungefär 50 MHz.

Fotonenergin och den relativa bredden.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{121,6 \text{ nm}} = 10,20 \text{ eV}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2,057 \cdot 10^{-7}}{10,20} = 2,017 \cdot 10^{-8}$$

Linjebredden.

$$\Delta \lambda = \lambda \frac{\Delta E}{E} = 121,6 \text{ nm} \cdot 2,017 \cdot 10^{-8} \approx \boxed{2,45 \cdot 10^{-6} \text{ nm}}$$

Bredden är ungefär en hundramiljondel av våglängden.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.4 Wave–Particle Duality, Probability, and Uncertainty
- 39.6 The Uncertainty Principle Revisited