

# Högre ordningens derivator

Apr 28, 2026, 4 min read

#flervariabelanalys

#partiell-derivata

ändra # Högre ordningens derivator

Kapitel: 13.4 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Partiella derivator

## 1. Notation för andraderivator

För en funktion  $z = f(x, y)$  erhålls **fyra** andraderivator genom att derivera de partiella derivatorna  $f_1$  och  $f_2$  en gång till.

### Indexnotation och Leibniz-notation

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

[✎ Hur man läser Leibniz-notationen >](#)

### Notation som träd

Utgå från  $f$ , derivera m.a.p.  $x$  eller  $y$  i varje steg:

$$f \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_1 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\partial_y} f_2 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

☰ Beräkna alla andraderivator för  $f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$  >

## 2. Symmetrisatsen (blandade derivatorna kommuterar)

### 🔄 Clairauts sats – blandade derivatorna kommuterar

**Kom ihåg:** Om  $f_{12}$  och  $f_{21}$  är **kontinuerliga** i en omgivning av  $(a, b)$  gäller:  $f_{12} = f_{21}$   
Ordningen spelar ingen roll. Används som **kontroll**: om  $f_{12} \neq f_{21}$  i din beräkning har du räknat fel.

### ⚠️ Satsen gäller inte alltid

Det finns funktioner där  $f_{12}$  och  $f_{21}$  **existerar** men inte är lika. Tillräckligt villkor: de blandade derivatorna är **kontinuerliga** i omgivningen av punkten.

## Tre variabler

För  $g(x, y, z)$  gäller på motsvarande sätt:

$$g_{13} = g_{31}$$

$$g_{123} = g_{321} = g_{213} = g_{132} = g_{312} = g_{231}$$

$$g_{112} = g_{121} = g_{211}$$

Indexen kan alltså **permuteras fritt** – ordningen är ej viktig (givet **kontinuitet**).

## 3. Laplaces ekvation

Många fysikaliska system beskrivs av den partiella differentialekvationen (**PDE**):

$$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0$$

I Leibniz-notation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Denna PDE kallas **Laplaces ekvation** och betecknas ibland  $\Delta f = 0$  (där  $\Delta$  är Laplace-operatören).

### Fysikalisk tolkning — stationär temperaturfördelning

En **stationär (tidsberoende) temperaturfördelning**  $T = T(x, y, z)$  i ett material utan inre värmekällor uppfyller Laplaces ekvation. "Stationär" innebär att temperaturen är konstant i tid — värme flöde sker, men ingen punkt värms upp eller kyls ned netto.

I allmänhet beror temperaturen på både position och tid:  $T = f(x, y, z, t)$ . I det stationära fallet faller tidberoendet bort.

## 4. Harmoniska funktioner

**Definition:** En funktion  $f$  som uppfyller Laplaces ekvation i ett område  $\Omega$  kallas **harmonisk** i  $\Omega$ :

$$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0 \quad \text{i } \Omega$$


#### Var dyker harmoniska funktioner upp?

- **Värmeledning** — stationär temperaturfördelning utan värmekällor
- **Elektrostatik** — elektrisk potential  $V$  i vakuum uppfyller  $\Delta V = 0$
- **Strömningslära** — strömningspotential för inkompressibel, rotationsfri strömning

### 2D-fallet

I två dimensioner lyder villkoret:

$$f_{11} + f_{22} = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

 **Visa att**  $T(x, y) = e^{3x} \sin(3y)$  **är harmonisk** >

---

## Läsning

- [2.6 Higher-Order Derivatives](#)
- [13.4 Higher-Order Derivatives](#)

## Se även

- [Partiella derivator](#)
- [Algebraiska egenskaper](#)
- [Kedjeregeln](#)

---

## Resurser

### Videor

- [Khan Academy: Second partial derivatives](#) — genomgång av andraderivator steg för steg
- [Khan Academy: Symmetry of second partial derivatives](#) — Clairauts sats
- [3Blue1Brown: Laplace equations](#) — geometrisk intuition för Laplaces ekvation

### Wikipedia

- [Partial derivative](#)
- [Symmetry of second derivatives \(Clairaut's theorem\)](#)
- [Laplace's equation](#)
- [Harmonic function](#)

### Fördjupning

- [Paul's Online Math Notes — Higher Order Partial Derivatives](#)

---

## Föreläsningsanteckningar

## 2026-03-27 - Föreläsning 5 (Trevariabel, andraderivator, Laplaces ekvation)

### Trevariabelfunktion

Exempel:  $f(x, y, z) = \cos(xz) + xy^2z^2 = w$   $\frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(xz)z + y^2z^2$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xyz^2$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = -\sin(xz)x + 2xy^2z$

### Nivåyta

För trevariabelfunktioner  $g(x, y, z) = C$  kan vi ej rita grafen i 3D, istället beskriver vi med nivåytor.

Differentialoperatoren  $\frac{\partial}{\partial x}$  är en partiell derivatoroperator m.a.p.  $x$ .

### Notation för andraderivator (träd)

Andraderivatorerna  $f_{11}$ ,  $f_{12}$ ,  $f_{21}$ ,  $f_{22}$  fås genom att derivera  $f_1$  och  $f_2$  igen.

Exempel:  $z = f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$

$$f_1 = 3x^2 \ln(xy) + x^2, \quad f_2 = 4y + \frac{x^3}{y}$$

$$f_{11} = 6x \ln(xy) + 5x, \quad f_{12} = \frac{3x^2}{y} = f_{21}, \quad f_{22} = 4 - \frac{x^3}{y^2}$$

Sats: Blandade derivatorna kommuterar:  $f_{12} = f_{21}$  (man kan permutera dem fritt vid kontinuitet).

### Fysikaliska modeller - Stationär temperaturfördelning

$T = f(x, y, z, t)$ . Stationär (tidsoberoende) temperaturfördelning  $T = f(x, y, z)$

uppfyller Laplaces ekvation (PDE):  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

Exempel 2D:  $T = e^{3x} \sin(3y)$  uppfyller  $T_{xx} + T_{yy} = 9e^{3x} \sin(3y) - 9e^{3x} \sin(3y) = 0 \checkmark$

### Kontinuitet för tvåvariabelfunktioner

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

(Jämför envariabelfallet: gränsvärdet ska finnas och vara lika med funktionsvärdet.)

---