Greens sats

Jun 12, 2026, 7 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Kurvintegraler av vektorfält, Dubbelintegraler

---

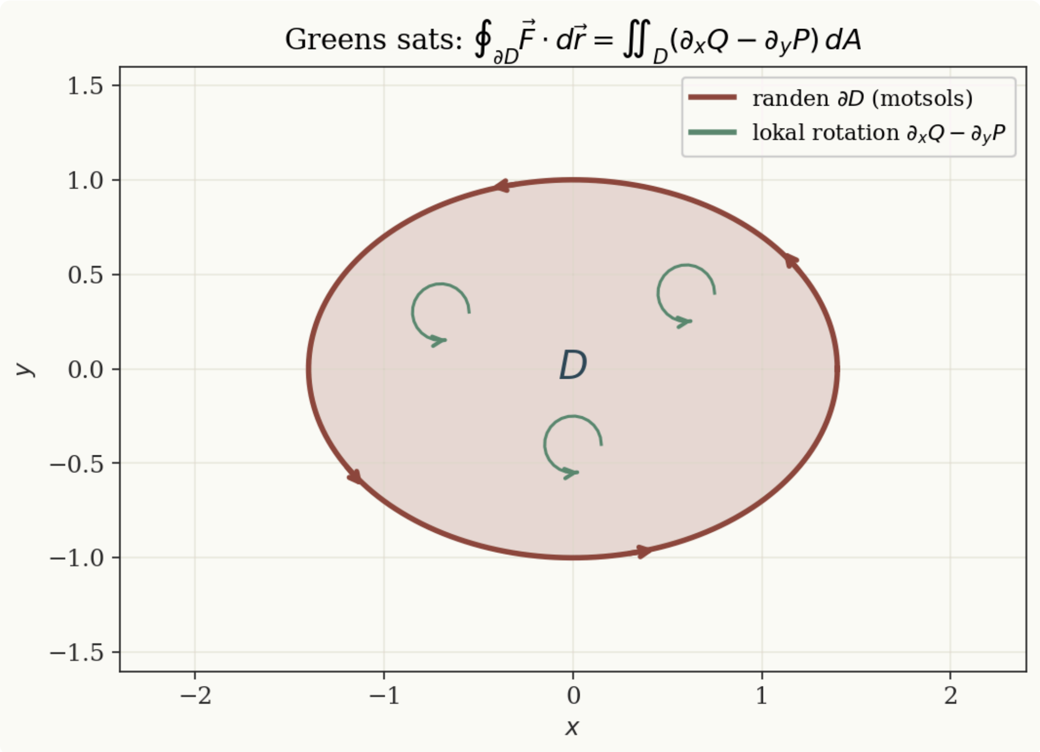
1. Idén bakom satsen

Det finns två naturliga sätt att mäta vad ett vektorfält $\vec{F}$ "gör" över ett område $D \subset \mathbb{R}^2$:

- **Längs randen:** kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ summerar fältets komponent längs $C = \partial D$ — *cirkulationen*.
- **Inne i området:** dubbelintegralen av en lokal "swirl-täthet" $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ summerar hur mycket fältet snurrar i varje punkt.

Greens sats säger att dessa två storheter är *samma sak*. Det är 2D-versionen av Stokes sats.

> **Grundtanken**
>
> Det som händer på randen kan räknas ut genom att summera något lokalt inne i D — och tvärtom. Ett globalt randvärde är samma sak som en lokal täthet integrerad över området.



2. Satsen

För ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q)$ som är C^1 på en omgivning av D, och en positivt orienterad styckevis C^1-rand $C = \partial D$:

$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA}$$

Positiv orientering

"Positivt orienterad" betyder att C traverseras motsols, så att D ligger till *vänster* när man rör sig längs randen. Vänd man riktningen byter både sidorna tecken samtidigt — likheten gäller fortfarande.

⚠ $\vec{F}$ måste vara definierat överallt i D

Om $\vec{F}$ har en singularitet inne i D — t.ex. blir oändlig i en punkt — gäller satsen *inte* direkt. Då måste man skära ut singulariteten, vilket ger en korrektionsterm. Se

Exempel 3.

3. Lokal tolkning — curlen som cirkulationstäthet

Varför ser integranden i högerled ut just så? En kort heuristik: betrakta en mycket liten rektangel R med hörn i (x, y) och sidor $\Delta x, \Delta y$. Cirkulationen längs randen ∂R, taget motsols, blir efter linjär approximation

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\approx\; \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta x \, \Delta y.$$

Det är därför integranden i Greens sats *är* just denna kombination — den mäter cirkulation per ytenhet i punkten.

Bygger man upp D av massor av små rektanglar och summerar cirkulationen längs allas ränder, så *kancellerar* alla inre kanter (varje inre kant traverseras en gång i varje riktning av två grannrektanglar). Bara den yttre randen C överlever, och man får

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{rektanglar}} \oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\Delta \to 0} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Mnemonic

Tänk på $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ som “swirl-tätheten” i en punkt. Greens sats säger: *summa av lokal swirl = total cirkulation kring randen.*

4. Kopplingen till curl

> På svenska är det $rot(\vec{F}) = \text{"rotationen av } \vec{F}\text{"}$

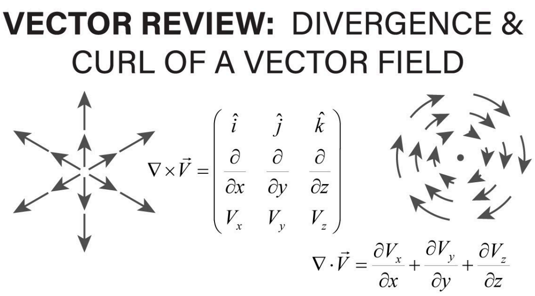
Integranden i högerled är exakt $\hat{k}$-komponenten av curlen $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ när $\vec{F}$ ses som ett 3D-fält $(P, Q, 0)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Med $F_3 = 0$ försvinner $\hat{\imath}$- och $\hat{\jmath}$-komponenterna och kvar blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

> Swirliness är trademark av Stephan.



Greens sats kan därför skrivas

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} \, dA,$$

vilket är precis hur 3D-versionen (Stokes sats) ser ut för en plan yta i xy-planet.

---

5. Specialfall — area

Sätt $P = -y/2, \ Q = x/2$. Då blir integranden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \tfrac{1}{2} - (-\tfrac{1}{2}) = 1,$$

så dubbelintegralen reduceras till arean. Det ger

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx)}$$

dvs. arean av D läses av direkt från en kurvintegral längs randen.

Exempel — arean av en ellips via Greens sats

6. Exempel

Exempel 1 — verifiera Greens sats för $\vec{F} = -y\,\hat{i} + x\,\hat{j}$

Exempel 2 — när det är *enklare* att gå via Greens sats

Exempel 3 — virvelfältet, och varför singulariteten spelar roll

Exempel 4 — polära koordinater

Exempel 5 — triangelområde, tre rätlinjiga sidor

7. Strategi

När är Greens sats användbart?

Använd Greens sats när:

- Kurvintegralen är besvärlig att parametrisera direkt, men $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ är *enkel* (Exempel 2).
- Området D är geometriskt enkelt så att dubbelintegralen blir rättfram.
- Du vill räkna en *area* från en parametrisering av randen (specialfallet i §5).

Använd den *omvända* riktningen — kurvintegral istället för dubbelintegral — när:

- Dubbelintegralen ser jobbig ut men randen är enkelt parametriserbar.

Och kontrollera alltid att $\vec{F}$ är C^1 på hela D. Singulariteter kräver särbehandling (Exempel 3).

---

8. Sammanfattning

$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA}$$

Specialfall	**Val av** (P, Q)	**Resultat**
Allmänt	godtyckliga C^1-funktioner	cirkulation = curl-integral
Area	$P = -y/2,\ Q = x/2$	$A = \frac{1}{2}\oint(x\,dy - y\,dx)$
Cirkulation av rotation	$P = -y,\ Q = x$	$\oint = 2 \cdot \text{area}(D)$

Läsning

- 17.3 Green’s Theorem in the Plane

Se även

- Stokes sats
- Gauss sats
- Kurvintegraler av vektorfält
- Vektorfält
- Divergens och rotation

Resurser

- 3Blue1Brown: Divergence and curl — geometrisk intuition för curl och Greens sats.
- Khan Academy: Green’s theorem
- Wikipedia: Green’s theorem