

Gränsvärden

Apr 28, 2026, 2 min read

#matematik

#analys

#envariabelanalys

#gränsvärde

Kurs: M0065M Förkunskaper: Funktioner

1. Grunddefinition

Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

om $f(x)$ kan göras godtyckligt nära L genom att välja x tillräckligt nära a , men med $x \neq a$.

 Note

Gränsvärdet beror på hur funktionen beter sig **nära** punkten, inte nödvändigtvis på värdet $f(a)$.

 Hävbar situation >

2. Räkneregler

Om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ gäller bland annat:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = L + M, \quad \lim_{x \rightarrow a} (fg) = LM$$

och

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{om } M \neq 0.$$

För kontinuerliga funktioner kan man ofta använda direkt insättning.

3. Ensidiga gränsvärden

De ensidiga gränsvärdena skrivs

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Ett tvåsidigt gränsvärde existerar precis när båda ensidiga existerar och är lika:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L}$$

☰ När gränsvärdet inte finns >

4. Standardgränsvärden

Följande är särskilt viktiga:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

☰ Typiskt användningsmönster >

5. Vanliga tekniker

Vanliga verktyg

- faktorisera och förkorta
- multiplicera med konjugat
- dela med högsta potens vid $x \rightarrow \infty$
- använd standardgränsvärden
- använd Taylors formel eller L'Hôpitals regel när kursen kommit dit

 [Instängningsregeln >](#)

6. Oegentliga gränsvärden och asymptoter

Om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

har grafen ofta en **vertikal asymptot** $x = a$.

Om

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

har grafen en **horisontell asymptot** $y = L$.

Läsning

- [1.2 Limits of Functions](#)
- [1.3 Limits at Infinity](#)

Se även

- [Kontinuitet](#)
- [Derivata](#)
- [Taylors formel](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Limits](#) ↗
 - [Wikipedia: Limit of a function](#) ↗
-