# Gränsvärden och kontinuitet

Apr 28, 2026, 5 min read

#flervariabelanalys #gränsvärde #kontinuitet

> **Kapitel:** 13.2 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Nivåkurvor och ytor, Partiella derivator

---

## 1. Avstånd i $\mathbb{R}^2$

Avståndet mellan punkterna $(x, y)$ och $(a, b)$ i planet definieras som:

$$\boxed{|(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

Detta är den euklidiska normen och generaliserar den vanliga absolutbeloppet från envariabelanalys. Att $(x, y) \to (a, b)$ betyder att detta avstånd går mot noll.

---

## 2. Gränsvärde

### 2.1 Definition

Låt $f(x, y)$ vara definierad i en omgivning kring $(a, b)$ (men inte nödvändigtvis i $(a, b)$ självt). Vi säger att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

om $f(x, y)$ kan göras godtyckligt nära $L$ för alla $(x, y)$ tillräckligt nära $(a, b)$. Formellt: för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

### 2.2 Skillnaden från envariabelfallet

I envariabelanalys räcker det att kontrollera närmande från vänster och höger — två riktningar. I $\mathbb{R}^2$ måste gränsvärdet vara **detsamma längs alla möjliga kurvor** som leder till $(a,b)$. Det finns oändligt många sådana vägar.

Varför oändligt många vägar? >

---

## 3. Visa att ett gränsvärde inte existerar

### 3.1 Metod: Olika vägar ger olika värden

Om man kan hitta **två vägar** till $(a,b)$ längs vilka $f(x,y)$ närmar sig **olika värden**, existerar gränsvärdet inte.

**Standardvägar att prova:**

| Väg | Substitution |
|---|---|
| Längs $x$-axeln | Sätt $y=0$, låt $x \to a$ |
| Längs $y$-axeln | Sätt $x=0$, låt $y \to b$ |
| Längs linjen $y=x$ | Sätt $y=x$, låt $x \to a$ |
| Längs parabeln $y=x^2$ | Sätt $y=x^2$, låt $x \to 0$ |
| Längs linjen $y=mx$ | Sätt $y=mx$, låt $x \to 0$ |

**Vanlig fallgrop — samma svar längs två vägar räcker inte**

Att $f$ ger **samma värde** längs *två* valda vägar bevisar **inte** att gränsvärdet existerar. Gränsvärdet måste vara detsamma längs *alla* möjliga vägar — oändligt många.

Slutsats du INTE kan dra: “Längs $y=0$ och $y=x$ fick jag 0 — alltså är gränsvärdet 0.” Två vägar kan bara *motbevisa* existens (om de ger olika svar), aldrig *bevisa* den.

☰ Gränsvärde som inte existerar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ›

☰ Gränsvärde som inte existerar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ›

☰ Gränsvärde längs $y = mx$ ger en familj av svar ›

---

## 4. Visa att ett gränsvärde existerar

### 4.1 Direktinsättning

Om $f$ är kontinuerlig i $(a, b)$ (se avsnitt 5) kan man sätta in direkt:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

### 4.2 Klämlemmat i 2D

Om $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ och $g(x,y) \to 0$ när $(x,y) \to (a,b)$, så är $\lim f(x,y) = L$.

**Vanlig strategi:** Uppskatta $|f(x,y)|$ med hjälp av $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (polära koordinater nära origo) och visa att uttrycket går mot noll.

☰ Gränsvärde med klämlemmat: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ ›

☰ Polära koordinater: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ ›

---

# 5. Kontinuitet

## 5.1 Definition

Funktionen $f(x, y)$ är **kontinuerlig i punkten** $(a, b)$ om:

1. $f(a, b)$ är definierat,
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existerar,
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

$$\boxed{f \text{ kontinuerlig i } (a, b) \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)}$$

## 5.2 Kontinuerliga funktioner

Alla elementära funktioner (polynom, rationella funktioner, trigonometriska, exponentialfunktioner, logaritmer) är kontinuerliga i sina definitionsmängder. Sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga.

Avgör om $f$ är kontinuerlig i $(0, 0)$ >

Avgör om $g$ är kontinuerlig i $(0, 0)$ >

---

# 6. Sammanfattning — Tillvägagångssätt

Tillvägagångssätt — steg för steg

Steg 1 — Direktinsättning: Är $f$ kontinuerlig i $(a, b)$? Sätt in direkt.

Steg 2 — Misstänker du att gränsvärdet INTE existerar? Prova längs $y = 0, x = 0, y = x$, $y = x^2, y = mx$. Två vägar med **olika** svar $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar **inte**.

Steg 3 — Tror du att gränsvärdet existerar? Uppskatta $|f(x,y) - L|$ uppifrån med ett uttryck som $\to 0$. Använd **klämlemmat**. Polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ underlättar ofta nära origo.

---

## Läsning

- 13.2 Limits and Continuity

## Se även

- Nivåkurvor och ytor
- Partiella derivator
- Kedjeregeln

---

## Resurser

### Videor

- Professor Leonard: Limits of Multivariable Functions — grundlig genomgång med flervägsteknik
- Khan Academy: Multivariable limits — introduktion med visualiseringar
- MIT OpenCourseWare 18.02: Limits — föreläsningsanteckningar

### Interaktiva verktyg

- Desmos 3D — visualisera ytor och närmanden längs kurvor
- GeoGebra 3D Calculator — utforska gränsvärden grafiskt

### Wikipedia

- Limit of a function (multivariable)
- Continuous function