Gauss sats

Jun 12, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Flödesintegraler, Trippelintegraler

---

1. Idén — utflöde lika med inre produktion

Gauss sats (även kallad **divergenssatsen**) säger något oerhört naturligt: hur mycket som strömmar *ut* genom randen av en volym är lika med hur mycket som *produceras* inuti. Källor och sänkor på insidan är det enda som syns på utsidan.

> **Grundtanken**
>
> $\nabla \cdot \vec{F}$ mäter lokalt om en punkt är en *källa* (> 0) eller *sänka* (< 0). När man summerar över hela volymen ska det som blir över synas som ett *flöde* ut genom ytan. Det är precis vad satsen säger.

Den binder ihop tre tidigare begrepp:

Lokalt	Globalt
divergens $\nabla \cdot \vec{F}$	trippelintegral $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$
vektorfältets normalkomponent	flöde $\displaystyle\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

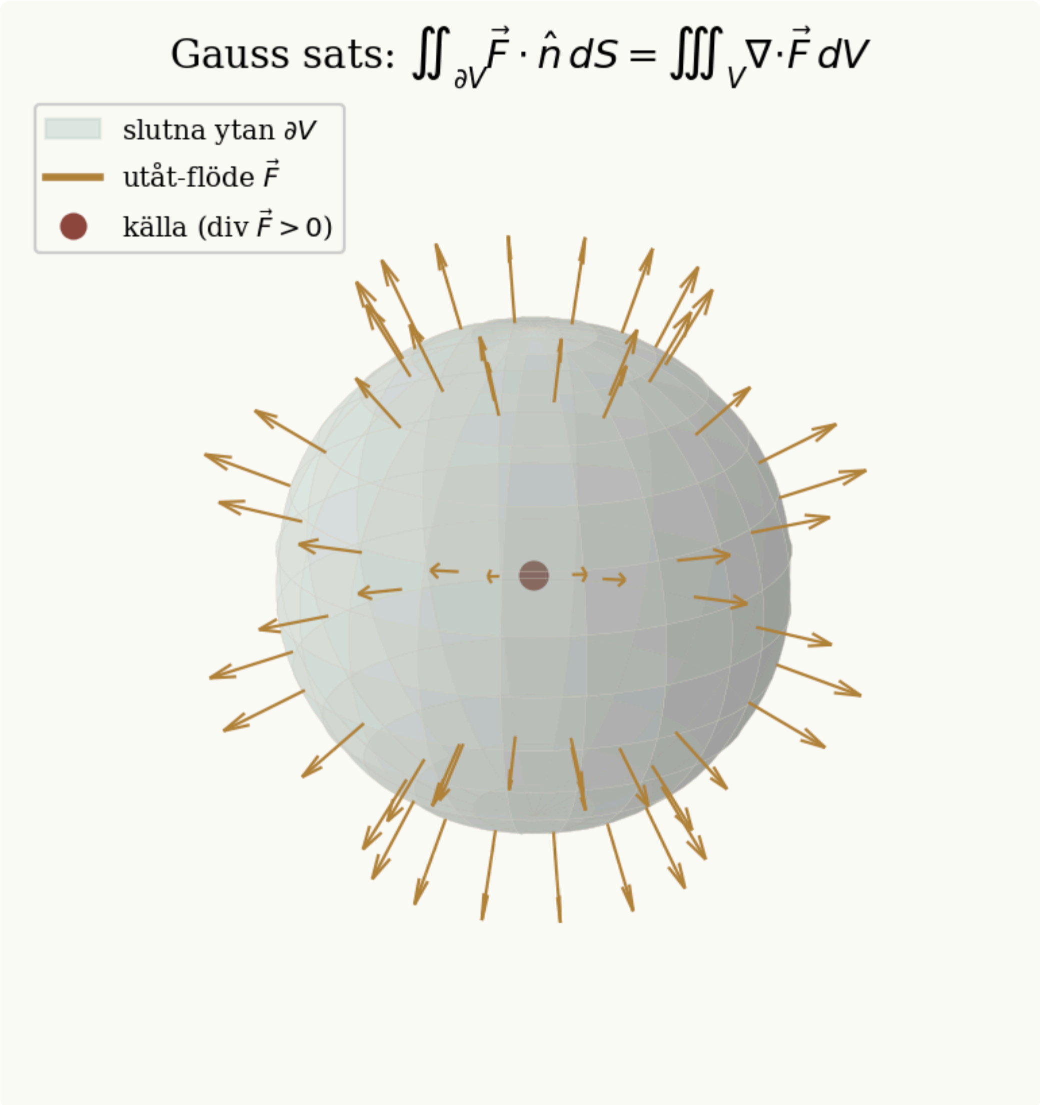
2. Satsen

Gauss sats (divergenssatsen)

Låt V vara en begränsad volym i $\mathbb{R}^3$ med styckvis slät, **utåtorienterad** rand ∂V. Låt $\vec{F}$ vara ett C^1-vektorfält i en omgivning av V. Då

$$\boxed{\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV}$$

Den vänstra sidan är flödet ut genom ∂V. Den högra är "totala produktionen" av $\vec{F}$ i V. Att de är lika är en av kalkylens skönaste likheter.



3. Varför är detta sant?

Tänk er V uppdelad i många små kuber. För en enda liten kub är flödet ut genom dess sex sidor *exakt* $\nabla \cdot \vec{F}$ gånger kubens volym (det är *definitionen* av divergens i gränsen). När man nu summerar över alla kuber:

- de **inre** sidoflödena tar ut varandra — det som lämnar en kub strömmar in i grannen,
- bara de **yttre** sidoflödena överlever — de sitter på ∂V.

Summan av små "lokalt utflöde" blir alltså globalt flöde ut, vilket är exakt vad satsen påstår.

Anlogi

Greens sats är 2D-versionen — flöde ut genom en plan kurva $=$ dubbelintegral av divergensen. Gauss sats är samma idé en dimension upp. De är båda specialfall av den allmänna **Stokes sats** för differentialformer.

4. Exempel

Exempel 1 — $\vec{F} = \vec{r}$ över valfri volym

Exempel 2 — flöde av $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ ut ur enhetskub

Exempel 3 — Gauss lag för elektrostatik

5. När är Gauss sats användbar?

Tre situationer där satsen verkligen lönar sig

1. **Trippelintegralen är enkel, ytintegralen krånglig.** Ofta är $\nabla \cdot \vec{F}$ konstant eller mycket enkel, så $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$ blir trivial — medan flödet över en sluten yta med flera släta bitar är mödosamt.

2. **Sluten yta saknar en bit.** Behöver du flödet genom en *öppen* yta S_1? Slut den med en hjälpbit S_2 (t.ex. en plan disk) så att $S_1 \cup S_2$ är sluten. Använd Gauss sats på den slutna ytan och dra av Φ_{S_2} — som ofta är enkelt.
3. **Symmetri.** Med sfär-, cylinder- eller boxsymmetri kan satsen användas baklänges för att räkna *fältet* från en känd laddningsfördelning — det är så Coulombs lag härleds från Maxwells ekvationer i fysiken.

6. Antaganden — det fina trycket

- V ska vara en *begränsad* volym med en *snäll* rand (styckvis slät, orienterbar, inåt-/utåt-distinktion meningsfull).
- $\vec{F}$ måste vara C^1 på en omgivning av hela V — inga singulariteter i det inre. I exempel 3 ovan måste man hantera origo separat eftersom $\vec{E}$ är singulärt där.
- ∂V orienteras med **yttre normal**. Inåtorientering byter tecken.

Läsning

- 17.4 The Divergence Theorem in 3-Space

Se även

- Divergens och rotation
- Flödesintegraler
- Trippelintegraler
- Stokes sats
- Greens sats

Resurser

- Khan Academy: Divergence theorem
- 3Blue1Brown: Divergence and curl — bygger intuitionen.
- Wikipedia: Divergence theorem