

Frekvensfunktion

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förekunskaper: Kontinuerliga stokastiska variabler, Fördelningsfunktion

Frekvensfunktionen $f_{\xi}(x)$ beskriver fördelningen för en kontinuerlig stokastisk variabel. Sannolikheten att variabeln hamnar i ett intervall är arean under frekvensfunktionen över intervallet.

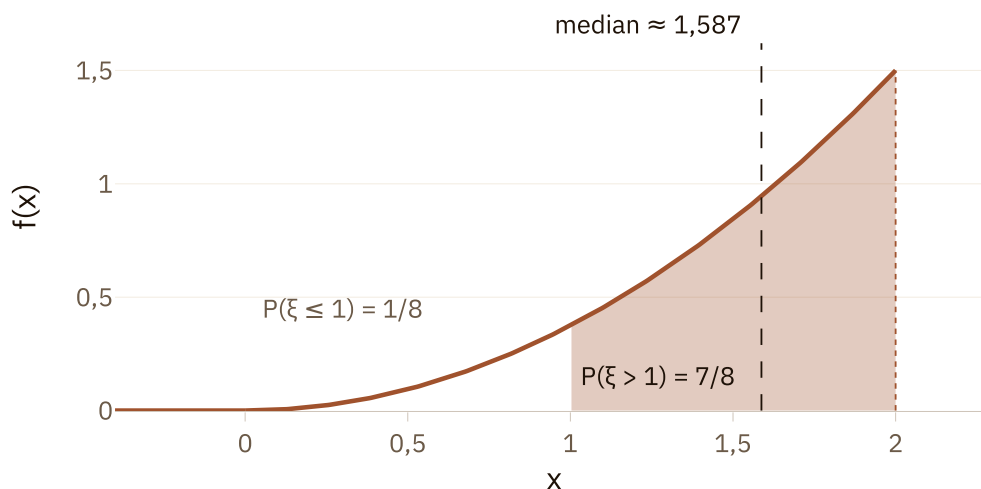
1. Definitionen

En kontinuerlig stokastisk variabel ξ har **frekvensfunktionen** f_{ξ} om

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f_{\xi}(x) dx$$

för alla $a \leq b$. I annan litteratur kallas samma funktion **täthetsfunktion**; kursen säger frekvensfunktion.

$f(x) = 3x^2/8$ på $[0, 2]$: sannolikheten är arean



2. Egenskaper

En funktion f är en frekvensfunktion om och endast om

$$f(x) \geq 0 \quad \text{för alla } x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Det räcker alltså att kontrollera de två villkoren för att visa att en given funktion är frekvensfunktion för någon stokastisk variabel. De motsvarar exakt villkoren på en **sannolikhetsfunktion**, med summan utbytt mot en integral.

 $f(x)$ är ingen sannolikhet

$f(x)$ får vara större än 1 — en rektangelfördelning på $[0, 0,5]$ har $f(x) = 2$. Det är arean som är en sannolikhet, inte höjden. Däremot är $f(x) dx \approx P(x < \xi \leq x + dx)$ för en liten intervalllängd dx .

3. Samband med fördelningsfunktionen

Fördelningsfunktionen är arean till vänster om x , och frekvensfunktionen är dess derivata:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt, \quad f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$$

(derivatan gäller i alla punkter där F_{ξ} är deriverbar). Ur det följer

$$P(a < \xi \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

och att $P(\xi = x) = 0$ för varje enskilt x : ett intervall med längd noll har area noll.

 **Summor blir integraler**

Diskret	Kontinuerlig
$p_{\xi}(x) = P(\xi = x)$	$f_{\xi}(x)$
$\sum_x p_{\xi}(x) = 1$	$\int f_{\xi}(x) dx = 1$
$P(\xi \in A) = \sum_{x \in A} p_{\xi}(x)$	$P(\xi \in A) = \int_A f_{\xi}(x) dx$
$E(\xi) = \sum_x x p_{\xi}(x)$	$E(\xi) = \int x f_{\xi}(x) dx$

☰ Exempel – Kontrollera och använd en frekvensfunktion

En stokastisk variabel ξ har frekvensfunktionen $f_\xi(x) = \frac{3}{8}x^2$ för $0 \leq x \leq 2$ och 0 annars.

- Visa att f_ξ är en frekvensfunktion.
- Beräkna $P(\xi > 1)$.
- Bestäm medianen och väntevärdet.

Lösning

a) $f_\xi(x) \geq 0$ överallt, och

$$\int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{8} \right]_0^2 = 1$$

b) Fördelningsfunktionen är $F_\xi(x) = x^3/8$ på $[0, 2]$, så

$$P(\xi > 1) = 1 - F_\xi(1) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

Intervallet $(1, 2]$ är halva definitionsmängden men bär $7/8$ av sannolikheten, eftersom f_ξ är störst där (figuren ovan).

c) **Medianen** löser $F_\xi(m) = 0,5$:

$$\frac{m^3}{8} = \frac{1}{2} \iff m = \sqrt[3]{4} \approx \boxed{1,587}$$

Väntevärdet är

$$E(\xi) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{2^4}{4} = \boxed{1,5}$$

Väntevärdet ligger till vänster om medianen: svansen åt vänster drar det nedåt.

På räknaren. Integralmallen i `menu` → Calculus → Integral, t.ex. $\int_1^2 \frac{3}{8}x^2 dx$ för b). Medianen med `solve(x^3/8=0.5,x)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

⚠ Vanliga fel

- **Läsa av höjden som en sannolikhet.** $f_\xi(1,5) \approx 0,84$ är ingen sannolikhet; bara arean är det.
- **Glömma kontrollen av arean.** Står det “bestäm c så att f blir en frekvensfunktion” är det villkoret $\int f = 1$ som ger c .
- **Integrera över fel område.** Utanför $[0, 2]$ är $f_\xi = 0$; gränserna ska klippas till där f_ξ är positiv.

Se även

- Kontinuerliga stokastiska variabler
- Fördelningsfunktion
- Sannolikhetsfunktion
- Väntevärde
- Median och kvantiler

Resurser

- [Khan Academy: Probability density functions](#)
- [Wikipedia: Probability density function](#)