

Ferminivån

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

Kurs: F0005T Förkunskaper: Energiband

Ferminivån E_F skiljer ockuperade från icke-ockuperade tillstånd. I en metall ligger den inne i ledningsbandet, och avståndet upp till vakuumnivån är just utträdesarbetet ϕ från fotoelektriska effekten. Det är samma storhet som brunnsdjupet i modellen partikel i potentialbrunn — bandet svarar mot brunnen, och ϕ mot kanten.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_{F0}}_{\text{högsta fyllda energin vid } T=0} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}}_{\text{fri elektron}} \left(3\pi^2 \underbrace{n}_{\substack{\text{elektroner} \\ \text{per m}^3}} \right)^{2/3}$$

Ju tätare elektronerna sitter, desto högre måste de fylla upp, eftersom Pauliprincipen bara tillåter två per rumsligt tillstånd. Metallbitens storlek spelar ingen roll, bara tätheten.

1. Ferminivån i frielektronmodellen

I en metall är valenselektronerna inte bundna till någon atom. Vi ser dem som fria partiklar i en låda med metallens form, en tredimensionell version av **partikel i låda**. Vid $T = 0$ fylls tillstånden nerifrån, två elektroner per rumsligt tillstånd, tills alla N elektroner fått plats. Den högsta besatta energin är ferminivån vid absoluta nollpunkten, E_{F0} .

Antalet tillstånd med energi upp till E räknas fram i **Tillståndstäthet**:

$$n(E) = \frac{(2m)^{3/2} V E^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Vid $T = 0$ är precis N av dem fyllda, så $n(E_{F0}) = N$:

$$N = \frac{(2m)^{3/2} V E_{F0}^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

$$E_{F0}^{3/2} = \frac{3\pi^2 \hbar^3}{(2m)^{3/2}} \cdot \frac{N}{V}$$

$$E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Kvoten N/V är **elektronkoncentrationen**, som vi skriver n :

$$E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Ferminivån beror alltså bara på hur tätt elektronerna sitter, inte på hur stor metallbiten är.

Elektronkoncentrationen får vi ur densiteten ρ , molmassan M och antalet fria elektroner z per atom:

$$n = z \cdot \frac{\rho}{M} \cdot N_A$$

Fysika: T k3 (n tabellerad per grundämne)

För vanliga metaller blir $n \approx 10^{28} - 10^{29} \text{ m}^{-3}$ och E_F några eV. Två storheter till gör storleken tydlig:

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}, \quad T_F = \frac{E_F}{k}$$

Fermifarten v_F är runt 10^6 m/s , och det är farten hos de snabbaste elektronerna *vid absoluta nollpunkten*. Fermitemperaturen T_F är några tiotusentals kelvin. Den säger att en klassisk gas skulle behöva så hög temperatur för att ha lika mycket rörelseenergi.

2. Medelenergin

Vid $T = 0$ är alla tillstånd under E_{F0} fyllda och alla över tomma. Med tillståndstätheten $g(E) = C\sqrt{E}$ blir den totala energin och antalet elektroner

$$E_{\text{tot}} = \int_0^{E_{F0}} E g(E) dE = C \int_0^{E_{F0}} E^{3/2} dE = \frac{2}{5} C E_{F0}^{5/2}$$

$$N = \int_0^{E_{F0}} g(E) dE = C \int_0^{E_{F0}} E^{1/2} dE = \frac{2}{3} C E_{F0}^{3/2}$$

Kvoten ger medelenergin per elektron:

$$E_{\text{av}} = \frac{E_{\text{tot}}}{N} = \frac{2/5}{2/3} E_{F0}$$

$$E_{\text{av}} = \frac{3}{5} E_{F0}$$

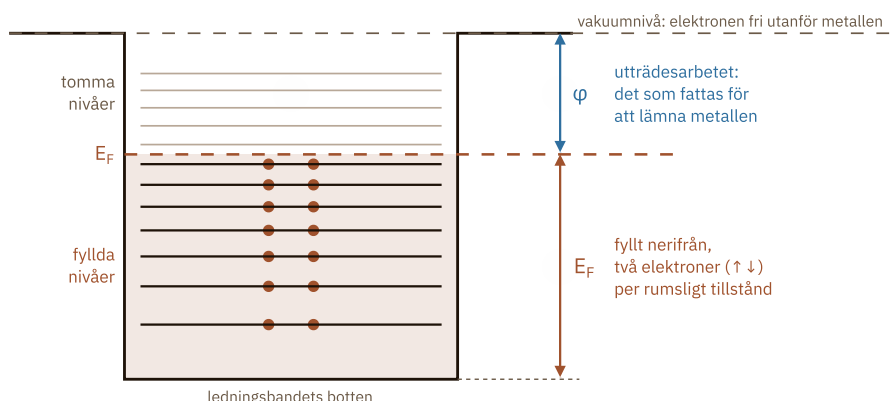
Konstanten C förkortas bort. En klassisk gas vid 300 K har medelenergin $\frac{3}{2}kT = 0,039$ eV, alltså ungefär femtio gånger mindre. Elektrongasen i en metall är långt ifrån klassisk, och det är Pauliprincipen som tvingar upp elektronerna i energi.

3. Ferminivån och temperaturen

Eftersom E_F är några eV och kT bara 0,026 eV ändras nästan ingenting när metallen värms upp. Bara elektroner inom några kT från E_F kan flytta sig till lediga tillstånd ovanför, se **Fermi-Dirac-fördelningen**. För en metall kan vi därför använda E_{F0} vid alla vanliga temperaturer.

Det förklarar också varför elektronerna nästan inte bidrar till metallens värmekapacitet: de flesta sitter djupt under E_F och har inga lediga tillstånd att värmas upp till.

Bilden i ingressen går att göra kvantitativ. Räknat från ledningsbandets botten ligger de översta elektronerna på E_F , och de behöver ytterligare utträdesarbetet ϕ för att lämna metallen. Brunnens djup i modellen **partikel i potentialbrunn** blir då $E_F + \phi$.



Frielektronmodellen som en brunn. Vid $T = 0$ fyller elektronerna nivåerna nerifrån, två per rumsligt tillstånd, upp till E_F . Ovanför återstår utträdesarbetet ϕ upp till vakuumnivån, så brunnens djup är $E_F + \phi$.

⚠ Vanliga fel

- **n betyder två saker.** Här är n elektronkoncentrationen i m^{-3} , inte ett kvanttal. I noten om tillståndstäthet används $n(E)$ för antalet tillstånd upp till E .
- **Fel antal fria elektroner per atom.** Na och Cu har en, Mg och Zn två, Al tre. Glömmer vi faktorn z blir E_F en faktor $z^{2/3}$ för liten.
- **Atomtätheten i fel enhet.** ρ/M måste vara i mol/m^3 : ρ i kg/m^3 och M i kg/mol , inte g/mol .

- E_F tas för en termisk energi. E_F finns även vid $T = 0$ och är ungefär hundra gånger större än kT vid rumstemperatur.

4. Lösta exempel

≡ Exempel – Ferminivån i natrium

Natrium har densiteten 971 kg/m^3 , molmassan $22,99 \text{ g/mol}$ och en fri elektron per atom. Bestäm elektronkoncentrationen, ferminivån, fermifarten och medelenergin vid $T = 0$.

Lösning

Elektronkoncentrationen.

$$n = 1 \cdot \frac{971}{22,99 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = \boxed{2,54 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}}$$

Fysika: Te

Ferminivån. Vi räknar faktorerna var för sig:

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{(1,0546 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}} = 6,10 \cdot 10^{-39} \text{ J} \cdot \text{m}^2$$

$$(3\pi^2 n)^{2/3} = (7,53 \cdot 10^{29})^{2/3} = 8,28 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-2}$$

$$E_{F0} = 6,10 \cdot 10^{-39} \cdot 8,28 \cdot 10^{19} = 5,05 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \boxed{3,15 \text{ eV}}$$

Fermifarten.

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,05 \cdot 10^{-19}}{9,109 \cdot 10^{-31}}} = \boxed{1,05 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

Medelenergin.

$$E_{av} = \frac{3}{5} \cdot 3,15 \text{ eV} = \boxed{1,89 \text{ eV}}$$

Rimlighetskontroll. v_F är 0,35 % av ljushastigheten, så den klassiska formeln för rörelseenergi duger. Fermitemperaturen blir $E_F/k = 3,66 \cdot 10^4 \text{ K}$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Exempel – Ferminivån i aluminium

Aluminium har densiteten 2700 kg/m^3 , molmassan $26,98 \text{ g/mol}$ och tre fria elektroner per atom. Bestäm ferminivån och fermifarten.

Lösning

Elektronkoncentrationen. Med $z = 3$:

$$n = 3 \cdot \frac{2700}{26,98 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 1,81 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

Ferminivån.

$$(3\pi^2 n)^{2/3} = (5,35 \cdot 10^{30})^{2/3} = 3,06 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-2}$$

$$E_{F0} = 6,10 \cdot 10^{-39} \cdot 3,06 \cdot 10^{20} = 1,87 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \boxed{11,7 \text{ eV}}$$

Fermifarten.

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,87 \cdot 10^{-18}}{9,109 \cdot 10^{-31}}} = \boxed{2,03 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

Rimlighetskontroll. Aluminium har 7,1 gånger fler fria elektroner per volym än natrium, och $7,1^{2/3} = 3,7$, vilket är kvoten $11,7/3,15$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals