

Fermi-Dirac-fördelningen

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #samband

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Ferminivån, Paulis uteslutningsprincip

Fördelningen ger sannolikheten att ett tillstånd med energin E är ockuperat av en elektron vid temperaturen T . Det är uttryckligen inte Maxwell-Boltzmannfördelningen, och skälet är tre: banden, Paulis uteslutningsprincip och att elektroner är omöjliga att särskilja. Vid $E = E_F$ är sannolikheten exakt $\frac{1}{2}$, och vid $T = 0$ blir fördelningen ett steg.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{f(E)}_{\substack{\text{sannolikheten} \\ \text{att tillståndet} \\ \text{är besatt}}} = \frac{1}{\underbrace{e^{(E-E_F)/kT}}_{\substack{\text{avstånd i } kT}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{håller} \\ f \leq 1}}}$$

Allt beror på hur många kT tillståndet ligger från E_F . Långt under går f mot 1, långt över mot 0, och ettan i nämnaren gör att f aldrig blir större än 1.

1. Formen på fördelningen

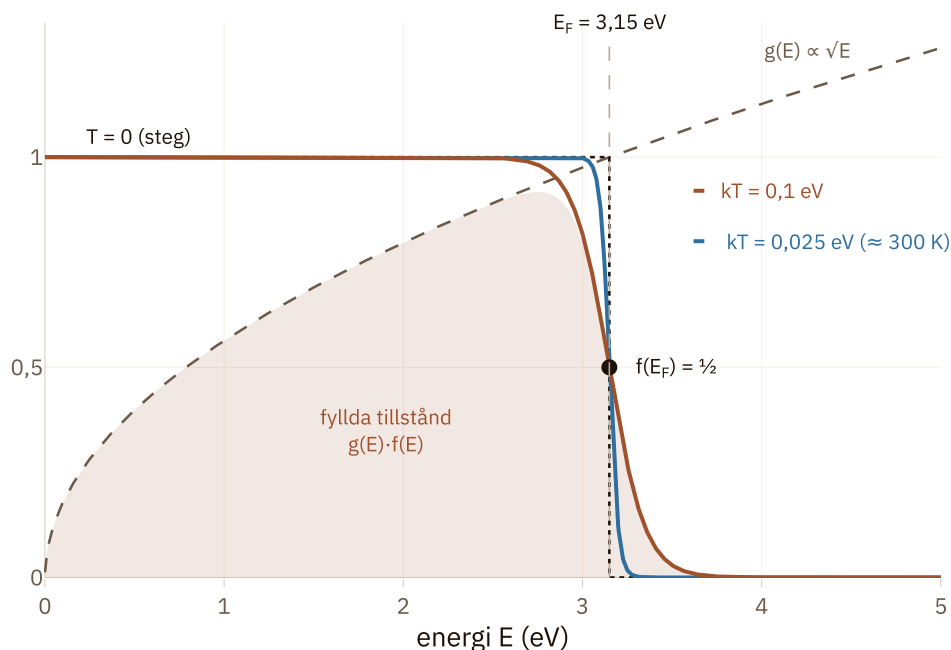
Tre värden räcker för att rita $f(E)$:

$$E = E_F : \quad f = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

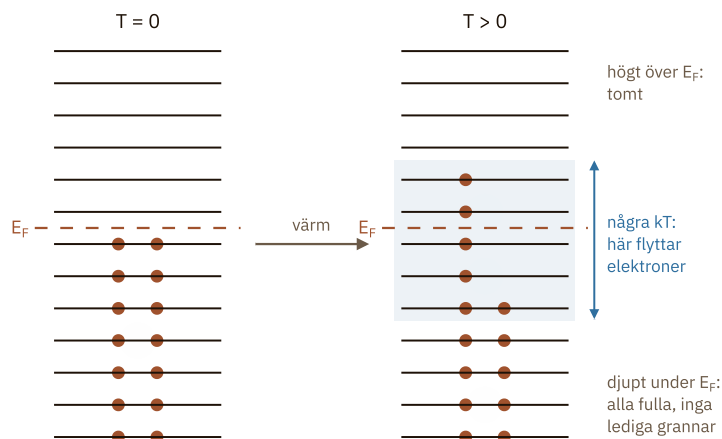
$$E - E_F \ll -kT : \quad e^{(E-E_F)/kT} \rightarrow 0, \quad f \rightarrow 1$$

$$E - E_F \gg kT : \quad e^{(E-E_F)/kT} \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow 0$$

Långt under **ferminivån** är alla tillstånd fulla, långt över är alla tomma, och övergången sker i ett band som är några kT brett kring E_F . Vid $T = 0$ krymper bandet till noll och f blir ett trappsteg. Vid rumstemperatur är $kT = 0,026$ eV, och för en metall med E_F på några eV är steget nästan lika skarpt som vid $T = 0$.



Fermi-Dirac-fördelningen för natrium ($E_F = 3,15$ eV) vid $T = 0$ och två temperaturer. Alla kurvor går genom $f = \frac{1}{2}$ vid E_F . Den streckade kurvan är **tillståndstätheten** $g(E) \propto \sqrt{E}$, och det skuggade området $g(E)f(E)$ visar var elektronerna faktiskt sitter vid den högre temperaturen.



Vad temperaturen gör med nivåerna nära E_F . Vid $T = 0$ är allt under E_F fyllt och allt över tomt. Vid $T > 0$ flyttar bara elektroner inom några kT under E_F till lediga nivåer strax över, och fyllnaden blir symmetrisk kring E_F .

2. Energin för en given sannolikhet

Ofta vill vi veta *var* sannolikheten har ett visst värde. Vi löser ut E ur formeln i rutan:

$$e^{(E-E_F)/kT} + 1 = \frac{1}{f}$$

$$e^{(E-E_F)/kT} = \frac{1}{f} - 1$$

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{f} - 1\right)$$

Med $f = 0,9$ och $f = 0,1$ blir logaritmen $\ln \frac{1}{9}$ och $\ln 9$. Fallet från 90 % till 10 % sker alltså över $2kT \ln 9 \approx 4,4 kT$.

3. Symmetrin kring E_F

Sätt $x = \Delta/kT$ och jämför ett tillstånd Δ över E_F med ett lika långt under:

$$\begin{aligned} f(E_F + \Delta) + f(E_F - \Delta) &= \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} \\ &= \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$f(E_F + \Delta) = 1 - f(E_F - \Delta)$$

Högerledet är sannolikheten att tillståndet under E_F är **tomt**. Sannolikheten att hitta en elektron Δ ovanför ferminivån är alltså lika stor som sannolikheten att hitta ett hål Δ under den. Det är därför ferminivån hamnar mitt i gapet i en ren **halvledare**.

4. Svansen blir Boltzmann

Långt ovanför ferminivån är exponentialfunktionen mycket större än 1, och ettan i nämnaren kan strykas:

$$E - E_F \gg kT : \quad f(E) \approx e^{-(E-E_F)/kT}$$

Det är Boltzmannfaktorn. Där tillstånden nästan alltid är tomma spelar Pauliprincipen ingen roll, och elektronerna beter sig som en klassisk gas. Redan vid $E - E_F = 3kT$ är felet bara 5 % ($e^{-3} = 0,0498$ mot $f = 0,0474$). Det är just den här approximationen vi använder för ledningselektronerna i en

halvledare, där $E - E_F$ är en halv elektronvolt.

Vanliga fel

- **"+1" glöms eller får fel tecken.** Utan ettan får vi Boltzmannfaktorn, som kan bli större än 1 under E_F och alltså inte är en sannolikhet. Med -1 blir det Bose-Einstein-fördelningen, som gäller fotoner och inte elektroner.
- **kT i joule och energierna i eV.** Använd $k = 8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K när $E - E_F$ är i eV.
- **f tolkas som ett antal elektroner.** f är sannolikheten att *ett* tillstånd är besatt, mellan 0 och 1. Antalet elektroner kräver också tillståndstätheten: $dN = g(E)f(E) dE$.
- **$f(E_F) = \frac{1}{2}$ tolkas som att det finns elektroner vid E_F .** I en halvledare ligger E_F i gapet där det inte finns några tillstånd. Sannolikheten är $\frac{1}{2}$, men det finns inget att besätta.

5. Lösta exempel

Exempel – Besättning kring ferminivån vid rumstemperatur

Vid 300 K: vad är sannolikheten att ett tillstånd 0,100 eV över ferminivån är besatt, och att ett tillstånd 0,100 eV under är besatt? Mellan vilka energier faller f från 0,9 till 0,1?

Lösning

Termiska energin.

$$kT = 8,617 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0,02585 \text{ eV}$$

Fysika: Te

Över E_F .

$$f = \frac{1}{e^{0,100/0,02585} + 1} = \frac{1}{e^{3,868} + 1} = \frac{1}{47,9 + 1} = \boxed{0,0205}$$

Under E_F . Symmetrin ger direkt

$$f(E_F - 0,100) = 1 - 0,0205 = \boxed{0,980}$$

Övergångsbandet. Med $E = E_F + kT \ln(1/f - 1)$:

$$f = 0,9 : \quad E - E_F = 0,02585 \cdot \ln \frac{1}{9} = -0,0568 \text{ eV}$$

$$f = 0,1 : \quad E - E_F = 0,02585 \cdot \ln 9 = +0,0568 \text{ eV}$$

Sannolikheten faller från 0,9 till 0,1 mellan $E_F - 0,0568 \text{ eV}$ och $E_F + 0,0568 \text{ eV}$, ett band som är 0,114 eV brett.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Temperaturen för en given sannolikhet

Vid vilken temperatur är sannolikheten 5,00 % att ett tillstånd 0,100 eV över ferminivån är besatt?

Lösning

Lös ut exponenten.

$$\frac{1}{e^{\Delta/kT} + 1} = 0,0500$$

$$e^{\Delta/kT} = \frac{1}{0,0500} - 1 = 19,0$$

$$\frac{\Delta}{kT} = \ln 19,0 = 2,944$$

Temperaturen.

$$T = \frac{\Delta}{k \ln 19,0} = \frac{0,100}{8,617 \cdot 10^{-5} \cdot 2,944} = \boxed{394 \text{ K}}$$

Rimlighetskontroll. Vid 300 K var sannolikheten 2,05 % enligt föregående exempel, så det krävs en något högre temperatur för 5 %.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals