Extremvärdesproblem

Apr 28, 2026, 4 min read

#matematik #optimering

Optimering på kompakta områden

En kontinuerlig funktion $f(x, y)$ på ett kompakt område K antar alltid både ett maximum och ett minimum (Weierstrass sats). Antag att $(x_0, y_0) \in K$ ger det största värdet. Då finns två möjligheter:

1. (x_0, y_0) är en **inre punkt** — då måste det vara en kritisk punkt, dvs. $f_1(x_0, y_0) = 0$ och $f_2(x_0, y_0) = 0$, eller en singulär punkt där partialderivatorna inte existerar.
2. (x_0, y_0) är en **randpunkt** — vi måste söka separat längs randen ∂K.

> **Notis:** ∂-tecknet i ∂K betecknar randen av ett område — det har ingenting med partialderivatorna att göra, trots notationen.

Metod

1. Bestäm alla **kritiska inre punkter**: lös $\nabla f = \vec{0}$, dvs. $f_1 = 0$ och $f_2 = 0$ simultant.
2. Bestäm alla **singulära inre punkter**: punkter i det inre av K där f_1 eller f_2 inte existerar.
3. **Genomsök randen** ∂K: parametrisera varje del av randen och undersök f längs dessa kurvor.

Jämför sedan alla kandidatvärden — störst är maximum, minst är minimum.

Exempel 1

Sök största och minsta värde hos $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ på $K : x^2 + y^2 \leq 1.$

Steg 1 – Kritiska inre punkter:

$$\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_1 = 1 + 2x = 0 \\ f_2 = 2y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = \left(-\tfrac{1}{2},\, 0\right)$$

Kontrollera att $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4} < 1$ – ja, punkten ligger innanför K.

Funktionsvärde: $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$.

Steg 2 – Singulära inre punkter: Saknas (f är ett polynom).

Steg 3 – Randundersökning:

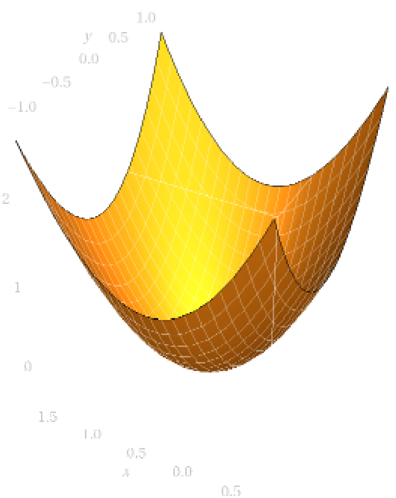
Parametrisera randen $x^2 + y^2 = 1$ med $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$:

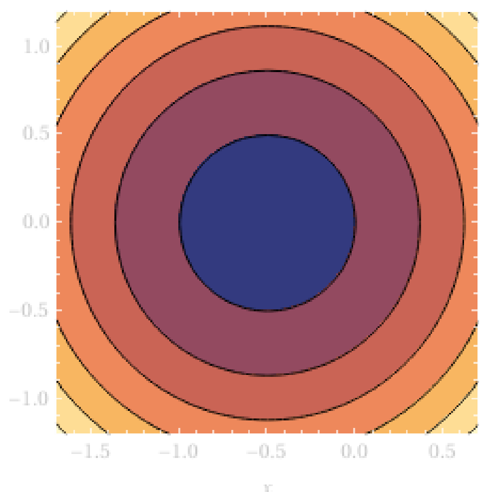
$g(t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = \cos t + 1$

Extrema: $g'(t) = -\sin t = 0 \implies t = 0$ eller $t = \pi$, dvs. punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$.

Punkt	f-värde
$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$-\frac{1}{4}$
$(1,\, 0)$	2
$(-1,\, 0)$	0

Svar: Minsta värdet är $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$, största värdet är $f(1, 0) = 2$.





Exempel 2

Sök största och minsta värde hos $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ på $K : 0 \le x \le y \le 1$ (triangeln med hörn $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$).

Steg 1 – Kritiska inre punkter:

$$\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_1 = 1 - 2x = 0 \\ f_2 = -2y = 0 \end{cases} \implies (x,y) = \left(\tfrac{1}{2},\, 0\right)$$

Punkten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ kräver $x \le y$, dvs. $\frac{1}{2} \le 0$ — falskt. Punkten ligger **utanför** K och kastas bort.

Steg 2 – Singulära inre punkter: Saknas.

Steg 3 – Randundersökning:

Randen ∂K består av tre sidor:

- γ_1: $y = x, x \in [0,1]$ — diagonalen
- γ_2: $x = 0, y \in [0,1]$ — vänsterkanten
- γ_3: $y = 1, x \in [0,1]$ — toppen

γ_1: $h(x) = f(x,x) = 3 + x - 2x^2$

$$h'(x) = 1 - 4x = 0 \implies x = \tfrac{1}{4}, \quad \text{dvs. } \left(\tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$f\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{25}{8}$$

γ_2: $h(y) = f(0,y) = 3 - y^2$, avtagande för $y > 0$.

γ_3: $h(x) = f(x,1) = 2 + x - x^2$

$$h'(x) = 1 - 2x = 0 \implies x = \tfrac{1}{2}, \quad \text{dvs. } \left(\tfrac{1}{2},\, 1\right)$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = \tfrac{9}{4}$$

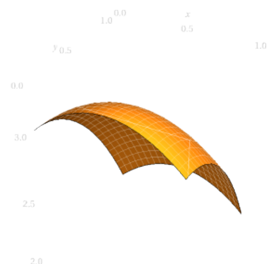
Hörn:

Hörn	f-värde
$(0,0)$	3
$(0,1)$	2

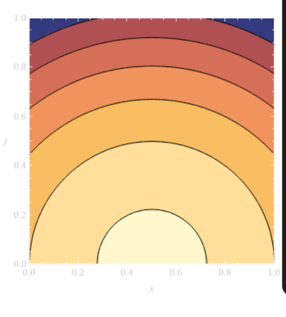
Hörn	f-värde
$(1, 1)$	2

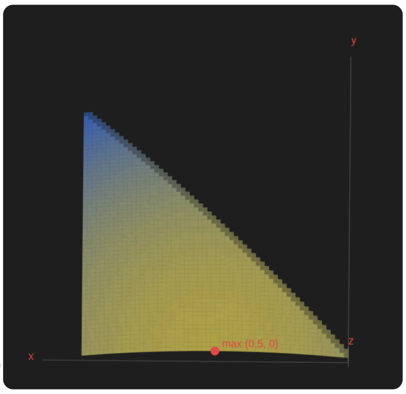
Alla kandidater:

Punkt	f-värde
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{25}{8} = 3{,}125$
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$
$(0, 0)$	3
$(0, 1)$	2
$(1, 1)$	2



Svar: Minsta värdet är $f = 2$, största värdet är $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{8}$.





Optimering under bi-vilkor

$$f(x, y) \to \max/\min, \text{ där } (x, y) \in K$$

Bivilkor betyder att man tar med en två variablig nivåkurva i spelet. $g(x, y) = 0$

Exempel

Sök avstånd mellan origo och den släta nivåkurvan $y = h(x)$. Avsåtndet är $\sqrt{x^2 + y^2}$, men vi kan välja att plocka bort rottäcken och räkna med avstånd i kvadrat. $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{minimera under bivilkoret} \rightarrow y - h(x) = 0$

där $y - h(x) = g(x, y)$

Kurvorna $f(x, y) = c$ och $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i den punkt som ger oss maximum (lösningslunkten)

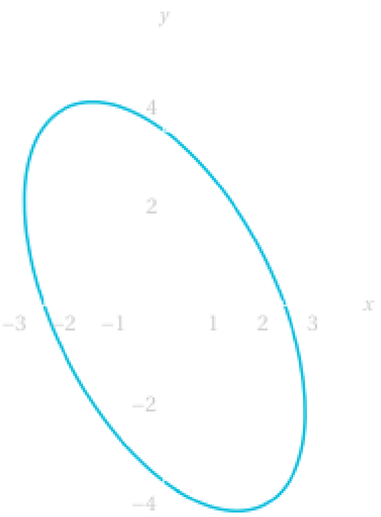
$\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$ parralell och motriktade där λ är en skallär och kallas Lagranges multiplikatormetod multiplikator. Metoden som vi tar oss fram till kallas Lagranges multiplikatormetod

Man kan införa lagrangefunktionen $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Det nödvändiga villkoret kan skrivas som $L_1 = L_2 = L_3 = 0 \implies f_1 + \lambda g_2 = f_2 + \lambda g_2 = g = 0 \iff \nabla f = -\lambda \nabla g$ stationaritetsvilkor $g = 0$ = bivilkor

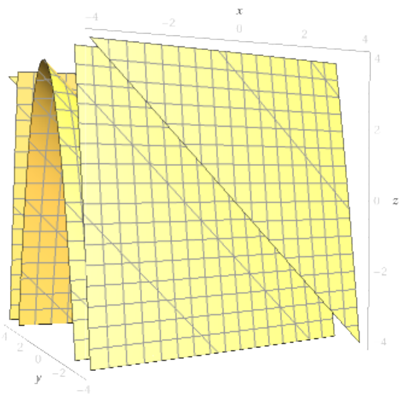
omformning (utan λ) $\det[\nabla f \quad \nabla g] = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} = 0$

Example bestäm punkter en elips ($17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$) som ligger närmast resp, längst från origo Man kan se att det är en elips pga det är en kvadratisk form som är hyperbolisk eller eliptisk. och vi kan skillja på de gemom att …



$x^2 + y^2 \to \min / \max$ under bivilkoret att $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0 = g(x)$ det nödvändiga villkoret $0 = \det[\nabla f \quad \nabla g]$

Exempel trevariabeloptimering, Bestäm det största och det minsta värdet på $f(x, y, z) = x + y^2 + z$ Tvingar på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

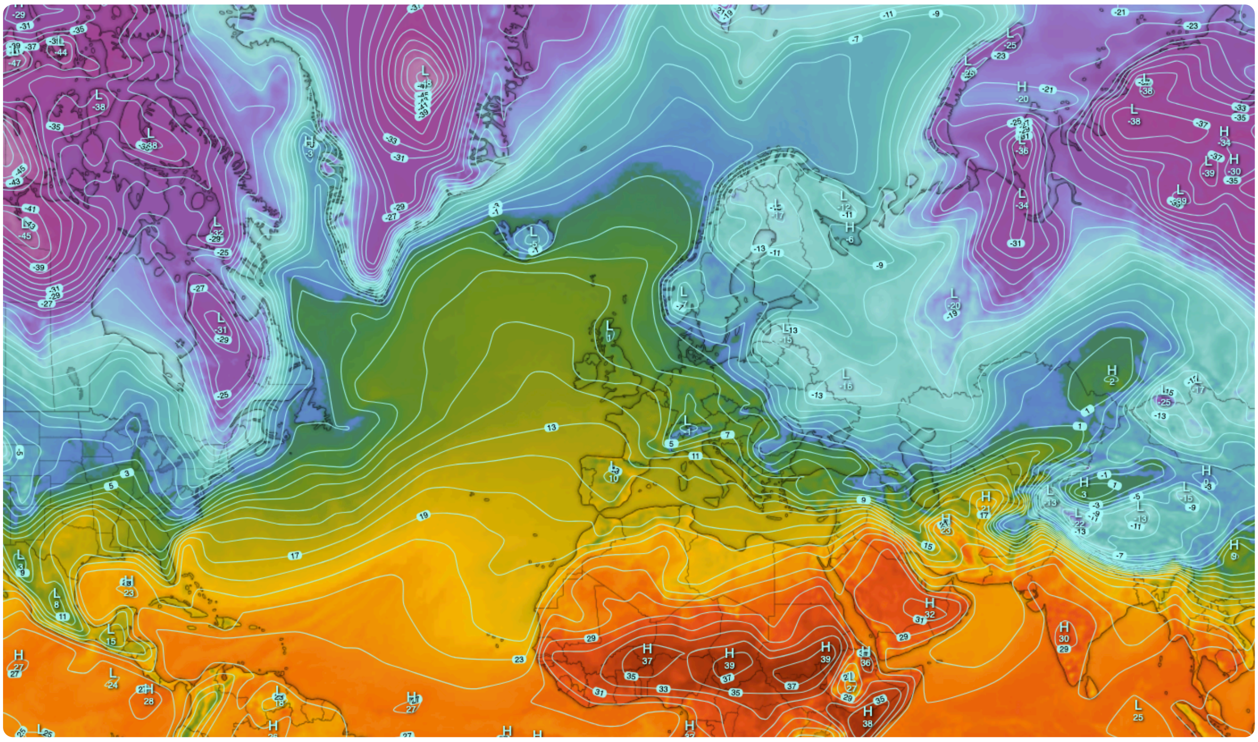


14.2 Exempel 2

> Stephen går igenom steg för steg

Vi går vidare till Lagranges multiplikatormetod

Illustrationer



Extremvärde

Relaterade koncept

topologiska begräpp

Läsning

- 14.1 Extreme Values
- 14.2 Extreme Values on Restricted Domains
