

Exponentialfördelning

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Kontinuerliga stokastiska variabler

Exponentialfördelningen beskriver väntetiden till nästa händelse i en process där händelser inträffar oberoende av varandra och med konstant intensitet. Den är minneslös: den återstående väntetiden beror inte på hur länge vi redan har väntat.

1. Frekvensfunktion och fördelningsfunktion

En **kontinuerlig stokastisk variabel** ξ är **exponentialfördelad** med parameter $\lambda > 0$, $\xi \in \text{Exp}(\lambda)$, om frekvensfunktionen är

$$f_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

och $f_{\xi}(x) = 0$ för $x < 0$. Integrerar vi får vi **fördelningsfunktionen**

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Den behövs nästan alltid, eftersom sannolikheter för intervall då räknas utan integraler:

$$P(\xi > x) = e^{-\lambda x}, \quad P(a < \xi \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

2. Väntevärde och varians

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

 **Härledning av $E(\xi)$ och $V(\xi)$**

Partiell integration, där randtermerna försvinner eftersom $x^k e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(\xi^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} E(\xi) = \frac{2}{\lambda^2}, \quad V(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Parametern λ är alltså en **intensitet**, antal händelser per tidsenhet, och $1/\lambda$ är den genomsnittliga väntetiden. En komponent med $\lambda = 0,005$ per timme håller i genomsnitt 200 timmar.

Kopplingen till Poissonfördelningen

Inträffar händelser med intensiteten λ per tidsenhet är antalet händelser under en tidsenhet **Poissonfördelat**, $Po(\lambda)$, och tiden mellan två händelser $\text{Exp}(\lambda)$. Samma process, två frågor: *hur många* respektive *hur länge*.

3. Minneslösheten

För $s, t \geq 0$ gäller

$$P(\xi > s + t \mid \xi > s) = \frac{P(\xi > s + t)}{P(\xi > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(\xi > t)$$

En komponent som redan har fungerat i s timmar har samma chans att klara t timmar till som en helt ny. Det är en rimlig modell för komponenter som inte slits, till exempel elektronik som går sönder av slumpmässiga spänningstoppar, men inte för delar som nöts.

Vanliga fel

- **Parameter eller väntevärde.** $\text{Exp}(\lambda)$ har väntevärdet $1/\lambda$. Står det “medellivslängd 200 timmar” är $\lambda = 1/200$, inte 200.
- **Tro att äldre komponenter är sämre.** Minneslösheten gör $P(\xi > s + t \mid \xi > s) = P(\xi > t)$; ålder spelar ingen roll i modellen.
- **Integrera i onödan.** $P(\xi > x) = e^{-\lambda x}$ direkt ur fördelningsfunktionen.

4. Lösta lektionsuppgifter

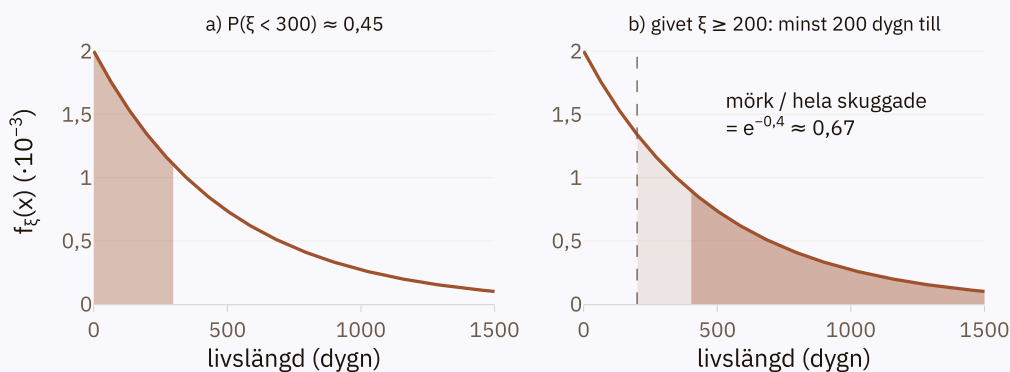
≡ Lektion 6, övning 6 – Sensorn i en digitalkamera (tenta 2005-10-24)

Livslängden ξ för en typ av sensor i en digitalkamera kan beskrivas av en exponentialfördelning med $\lambda = 0,002$, enhet dygn.

- a) Vad är sannolikheten att livslängden understiger 300 dygn?
- b) Givet att en sensor hållit i 200 dygn, vad är sannolikheten att den håller minst 200 dygn till?

Lösning

Modell. $\xi \in \text{Exp}(0,002)$, så $F_\xi(x) = 1 - e^{-0,002x}$ för $x \geq 0$ och $P(\xi > x) = e^{-0,002x}$.



a)

$$P(\xi < 300) = F_\xi(300) = 1 - e^{-0,002 \cdot 300} = 1 - e^{-0,6} \approx \boxed{0,45}$$

b) "Håller minst 200 dygn till" är $\xi \geq 400$, givet $\xi \geq 200$. Eftersom $\{\xi \geq 400\}$ ligger helt inom $\{\xi \geq 200\}$ är snittet bara $\{\xi \geq 400\}$:

$$P(\xi \geq 400 \mid \xi \geq 200) = \frac{P(\xi \geq 400)}{P(\xi \geq 200)} = \frac{e^{-0,8}}{e^{-0,4}} = e^{-0,4} \approx \boxed{0,67}$$

Det är samma som $P(\xi \geq 200)$ för en ny sensor – minneslösheten från avsnitt 3. Att sensorn redan hållit 200 dygn säger ingenting om hur länge till den håller.

På räknaren. a) $1 - e^{(-0.002 \cdot 300)}$, b) $e^{(-0.002 \cdot 200)}$.

Facit: a) 0,45, b) 0,67.

≡ Lektion 7, övning 1 – Programstart

Tiden ξ (sekunder) det tar för ett visst program att starta har fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 1 - e^{-0,2(x-3)}, & x \geq 3 \end{cases}$$

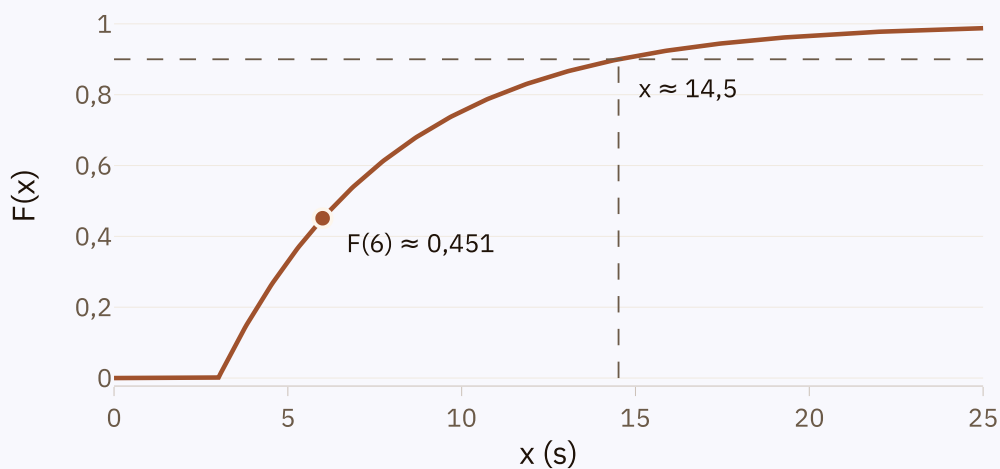
Skissa fördelningsfunktionen och bestäm

a) sannolikheten att det tar mer än 6 sekunder för programmet att starta,

b) den tid x som programmet startar inom med 90 % sannolikhet.

Lösning

Fördelningen är en exponentialfördelning med $\lambda = 0,2$, förskjuten 3 sekunder åt höger: programmet startar aldrig snabbare än på 3 sekunder.



a)

$$P(\xi > 6) = 1 - F(6) = e^{-0,2 \cdot 3} = e^{-0,6} \approx \boxed{0,55}$$

b) Vi söker x med $F(x) = 0,9$:

$$1 - e^{-0,2(x-3)} = 0,9 \iff e^{-0,2(x-3)} = 0,1 \iff x = 3 + \frac{\ln 10}{0,2} \approx \boxed{14,5 \text{ s}}$$

På räknaren. b) `solve(1-e^(-0.2*(x-3))=0.9, x)`.

Facit: a) 0,55, b) 14,5 s.

≡ Lektion 7, övning 2 – Livslängd hos komponenter

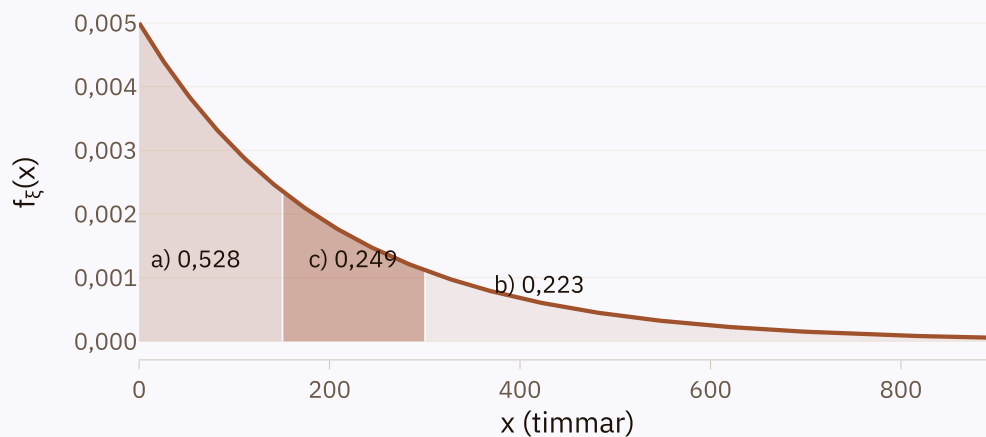
Livslängden ξ (timmar) för en typ av elektroniska komponenter är $\text{Exp}(0,005)$. Skissa frekvensfunktionen, markera sannolikheterna nedan i den och beräkna dem genom att utgå från frekvensfunktionen:

- a) $P(\xi \leq 150)$,
- b) $P(\xi > 300)$,
- c) $P(150 < \xi \leq 300)$,
- d) $P(\xi = 200)$.

Varför blir summan av a), b) och c) lika med 1?

Lösning

$$f_{\xi}(x) = 0,005 e^{-0,005x} \text{ för } x \geq 0.$$



a)

$$P(\xi \leq 150) = \int_0^{150} 0,005 e^{-0,005x} dx = 1 - e^{-0,75} \approx \boxed{0,528}$$

b)

$$P(\xi > 300) = \int_{300}^{\infty} 0,005 e^{-0,005x} dx = e^{-1,5} \approx \boxed{0,223}$$

c)

$$P(150 < \xi \leq 300) = e^{-0,75} - e^{-1,5} \approx \boxed{0,249}$$

d) För en kontinuerlig variabel har varje enskild punkt sannolikheten noll – integralen över ett intervall av längd noll:

$$P(\xi = 200) = \boxed{0}$$

Summan. a), b) och c) är disjunkta och täcker tillsammans hela $[0, \infty)$, så de måste summera till 1: $0,528 + 0,223 + 0,249 = 1,000$.

På räknaren. a) $1 - e^{(-0.005 \cdot 150)}$; med CAS går det också direkt:

$$\int (0.005 \cdot e^{(-0.005 \cdot x)}, x, 0, 150) .$$

Facit: a) 0,528, b) 0,223, c) 0,249, d) 0.

≡ Lektion 7, övning 3 – Fyra av tio komponenter håller

Livslängden för en komponent är som i övning 2, $\text{Exp}(0,005)$. Vad är sannolikheten att bland 10 komponenter exakt 4 har en livslängd som överstiger 300 timmar? Händelserna att livslängden överstiger 300 timmar för olika komponenter antas oberoende.

Lösning

Ny stokastisk variabel. Låt η = antal komponenter av de 10 som håller mer än 300 timmar. Varje komponent gör det med sannolikheten $p = P(\xi > 300) = e^{-1,5} \approx 0,223$, oberoende av de andra, så $\eta \in \text{Bin}(10, 0,223)$.

$$P(\eta = 4) = \binom{10}{4} 0,223^4 (1 - 0,223)^6 \approx \boxed{0,114}$$

Uppgiften kombinerar en kontinuerlig fördelning, som ger p , med en **binomialfördelning** för antalet.

På räknaren. `binomPdf(10, e^(-1.5), 4)`.

Facit: 0,114.

Se även

- Kontinuerliga stokastiska variabler
- Poissonfördelning
- Fördelningsfunktion
- Normalfördelning
- ffg-fördelning

Resurser

- [Khan Academy: Continuous random variables](#)
- [Wikipedia: Exponentialfördelning](#)

