

Enkla hypoteser

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #metod

Kurs: S0008M Förkunskaper: Hypotesprövning

En enkel hypotes anger ett enda bestämt värde på parametern. Eftersom både noll- och mothypotes då är fullständigt specificerade kan vi beräkna både risken att felaktigt förkasta och risken att felaktigt behålla nollhypotesen.

1. Situationen

Låt $\xi_1, \dots, \xi_n$ vara oberoende och $\in N(\mu, \sigma)$ med känt σ . Vi prövar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu = \mu_1, \quad \mu_1 > \mu_0$$

Båda hypoteserna innehåller bara ett värde, så båda är **enkla**. Situationen är inte särskilt realistisk — sällan finns bara två möjliga värden — men den visar hela maskineriet i **hypotesprövningen** utan komplikationer.

2. Testet

Stora värden på $\bar{x}$ talar för H_1 , så testet blir: förkasta H_0 om $\bar{x} > k$. Under H_0 är $\bar{\xi} \in N(\mu_0, \sigma/\sqrt{n})$, och signifikansnivån α ger

$$\alpha = P(\bar{\xi} > k \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{\xi} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \implies \boxed{k = \mu_0 + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

där λ_α är kvantilen i $N(0, 1)$ med $P(\eta > \lambda_\alpha) = \alpha$, på räknaren `invNorm(1- $\alpha$ )`.

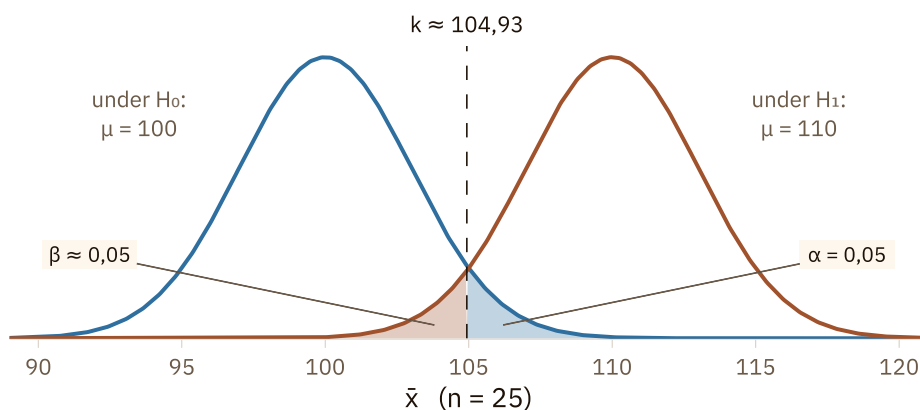
3. Båda felriskerna

Med en enkel mothypotes kan vi också räkna ut sannolikheten att **inte** förkasta H_0 fast H_1 gäller, felet av andra slaget:

$$\beta = P(\bar{\xi} \leq k \mid \mu = \mu_1) = \Phi\left(\frac{k - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Styrkan är $1 - \beta$. På räknaren är $\beta = \text{normCdf}(-\infty, k, \mu_1, \sigma/\sqrt{n})$ — bocka i **Draw** så ritas arean.

Figuren visar fördelningen för $\bar{\xi}$ under respektive hypotes i övning 4 nedan ($\mu_0 = 100$, $\mu_1 = 110$, $\sigma/\sqrt{n} = 3$), med α till höger om k under H_0 och β till vänster om k under H_1 :



Avvägningen

Flyttar vi k åt höger minskar α men β ökar, och tvärtom. Det enda sättet att minska **båda** är att öka n : då krymper $\sigma/\sqrt{n}$, kurvorna blir smalare och överlappar mindre. Se [Signifikansnivå och styrka](#).

Vanliga fel

- **Blanda ihop λ_α och λ_β .** k ligger λ_α medelfel från μ_0 och λ_β medelfel från μ_1 .
- **Tro att $\alpha + \beta = 1$.** Båda kan göras små samtidigt, men bara genom större n .

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 14, övning 4 (Vännman 9.3) – Hur många observationer?

Observationerna är oberoende och $\bar{X} \in N(\mu, 15/\sqrt{n})$. Vi prövar $H_0 : \mu = 100$ mot $H_1 : \mu = 110$ med testet "förkasta H_0 om $\bar{X} > k$ ".

a) Bestäm antalet observationer n och den kritiska gränsen k så att testet får signifikansnivån 5 % och styrkan minst 95 %.

b) Hur blir det nya testet?

Lösning

Fördelning. $\bar{X} \in N(\mu, 15/\sqrt{n})$. Den kritiska gränsen beror av n , så vi får två villkor på de två obekanta.

Villkor 1, signifikansnivån.

$$0,05 = P(\bar{X} > k \mid \mu = 100) \implies \frac{k - 100}{15/\sqrt{n}} = \lambda_{0,05} \approx 1,6449 \implies k = 100 + 1,6449 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}}$$

Villkor 2, styrkan.

$$0,95 = P(\bar{X} > k \mid \mu = 110) \implies \frac{110 - k}{15/\sqrt{n}} = \lambda_{0,05} \implies k = 110 - 1,6449 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}}$$

Lös ut n . Sätt uttrycken lika:

$$2 \cdot 1,6449 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 10 \implies n = (3 \cdot 1,6449)^2 \approx 24,35$$

n måste vara ett heltal. Med $n = 24$ och k från villkor 1 blir styrkan $\approx 0,948 < 0,95$; med $n = 25$ blir den $\approx 0,954$. Alltså $\boxed{n = 25}$, och villkor 1 ger

$$k = 100 + 1,6449 \cdot \frac{15}{5} \approx \boxed{104,93}$$

b) Det nya testet: förkasta H_0 om $\bar{x} > 104,93$, baserat på 25 observationer. Det är testet i figuren i avsnitt 3.

På räknaren. $\lambda_{0,05} = \text{invNorm}(0.95)$. Styrkorna för $n = 24$ och $n = 25$ kontrolleras med $\text{normCdf}(k, \infty, 110, 15/\sqrt{n})$, där k är gränsen för respektive n .

Uppgiften (Vännman 9.3) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget ($n = 25$, $k \approx 104,93$), och svaret stämmer med det.

Se även

- Hypotesprövning
- Signifikansnivå och styrka
- Sammansatta hypoteser
- Normalfördelning

Resurser

- [Wikipedia: Type I and type II errors](#)