

Elektronmikroskop

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #metod

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** De Broglie-våglängd, Elektrondiffraktion

Upplösningen hos ett mikroskop begränsas av våglängden, och elektronens de Broglie-våglängd är omkring 10^{-10} m mot synligt ljus $5 \cdot 10^{-7}$ m – tusentals gånger bättre.

Transmissionselektronmikroskopet (TEM) skickar elektroner genom ett 10–100 nm tunt prov och når 0,1 nm upplösning. Svepelektronmikroskopet (SEM) slår i stället loss sekundärelektroner från ytan och mäter variationen i ström; det ger 10 nm upplösning, ser bara ytan men ger en bra tredimensionell bild.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda}_{\text{elektronens våglängd}} = \frac{h}{\underbrace{\sqrt{2m_e eV}}_{\text{rörelsemängden efter spänningen } V}}$$
$$\underbrace{\lambda}_{\text{i nm}} \approx \frac{1,23}{\underbrace{\sqrt{V}}_{\text{i volt}}}$$

Spänningen ger elektronen rörelseenergi, rörelseenergin ger rörelsemängd, och större rörelsemängd betyder kortare våglängd – men bara som $1/\sqrt{V}$. Det är den korta våglängden, inte förstoringen, som gör elektronmikroskopet skarpare än ljusmikroskopet.

1. Upplösningen bestäms av våglängden

Ett mikroskop kan inte skilja åt detaljer som är mycket mindre än våglängden på det som belyser provet, eftersom **diffractionen** suddar ut varje punkt till en fläck av ungefär den storleken. Med synligt ljus kring 500 nm stannar gränsen därför på några hundra nanometer, hur bra linserna än är.

En elektronstråle kan avbildas på samma sätt som en ljusstråle: elektriska och magnetiska fält böjer elektronbanorna så som linser bryter ljus. Själva förstoringen kräver alltså inga vågegenskaper – banorna kan räknas ut klassiskt. Vågnaturen kommer in först i upplösningen, och där vinner elektronen stort eftersom dess **de Broglie-våglängd** är tusentals gånger kortare än ljusets.

2. Elektronens våglängd vid spänningen V

Elektronerna lämnar en glödkatod med försumbar fart och accelereras genom spänningen V . Fältet uträttar arbetet eV , så

$$K = eV$$

Klassiskt är $K = p^2/2m_e$, alltså

$$p = \sqrt{2m_e K} = \sqrt{2m_e eV}$$

och de Broglies samband $\lambda = h/p$ ger

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden, i formen $\lambda = h/\sqrt{2mK}$ med $K = eV$)

Sätter vi in konstanterna blir $\lambda \approx 1,23 \text{ nm}/\sqrt{V}$ med V i volt: 100 V ger 0,123 nm, alltså ungefär ett atomavstånd, och 10 kV ger 0,0123 nm. Våglängden avtar bara som $1/\sqrt{V}$, så hundra gånger högre spänning ger tio gånger kortare våglängd.

3. Relativistisk korrektion

Ett transmissionselektronmikroskop arbetar med 40–400 kV. Elektronens viloen energi är $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$, så vid några hundra kV är K inte längre litet jämfört med $m_e c^2$ och den klassiska formeln ger för lång våglängd. Relativistiskt blir

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Km_e c^2}}$$

Härledning av den relativistiska våglängden

Den totala energin är viloen energi plus den kinetiska energin, se **Relativitetsteori**:

$$E = K + m_e c^2$$

Energi och rörelsemängd hänger ihop via

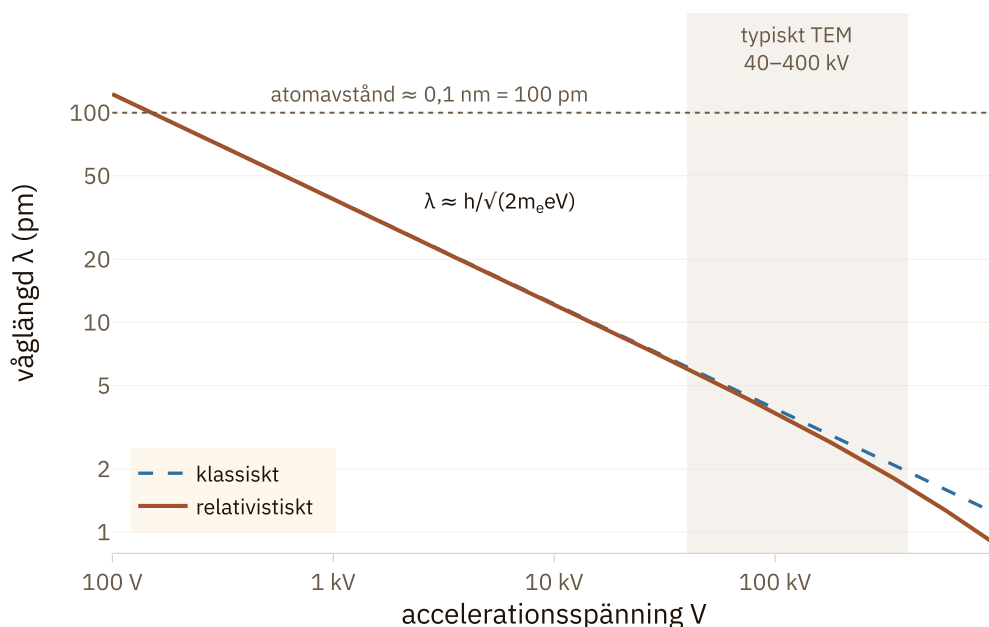
$$E^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2$$

Sätt in E och utveckla kvadraten:

$$(pc)^2 = (K + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2 = K^2 + 2Km_e c^2$$

Med $\lambda = h/p = hc/(pc)$ följer formeln i rutan. För $K \ll m_e c^2$ kan K^2 strykas mot $2Km_e c^2$, och då blir $pc = \sqrt{2Km_e c^2}$ och $\lambda = h/\sqrt{2m_e K}$ – den klassiska formeln.

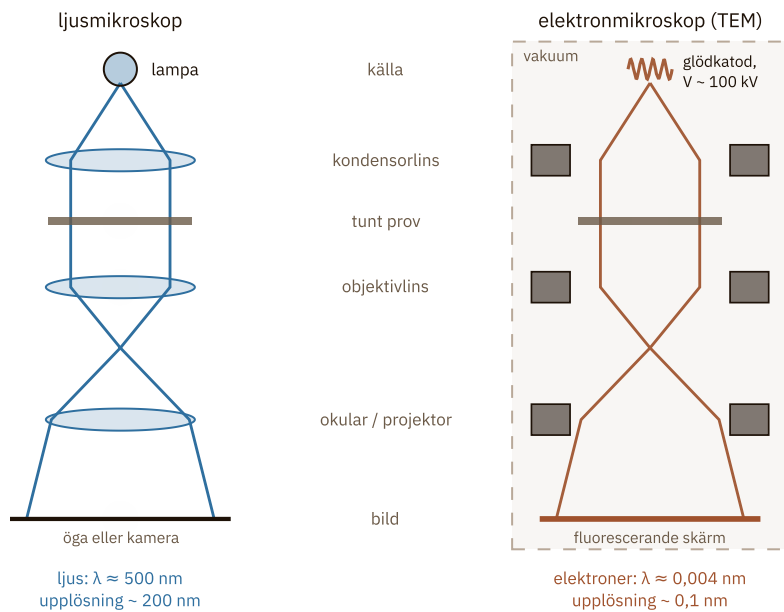
Räkna gärna med $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$ och $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$; då behöver inga joule användas alls. Skillnaden är 0,5 % vid 10 kV, 2 % vid 40 kV och 5 % vid 100 kV.



Elektronens de Broglie-våglängd mot accelerationsspänningen, i logaritmisk skala. Under ungefär 10 kV sammanfaller den klassiska och den relativistiska kurvan; i det skuggade området där TEM arbetar ger den klassiska formeln några till knappt 20 % för lång våglängd.

4. TEM och SEM

I ett **transmissionselektronmikroskop** (TEM) går strålen rakt genom provet. En kondensorlins av magnetfält gör strålen parallell, en objektivlins ger en mellanbild och en projektlins en slutlig reell bild på en fluorescerande skärm eller en detektor – samma roller som objektiv och okular i ett optiskt mikroskop. Allt sitter i vakuum, annars sprids elektronerna mot luftmolekylerna.



Ljuskroskopet och TEM sida vid sida: samma roller för källa, kondensor, prov, objektiv och projektor, men glaslinserna är utbytta mot magnetspolar och ljuset mot elektroner i vakuum. Det som ändras är våglängden, och därmed upplösningen.

Upplösningen blir sällan bättre än $0,1 \text{ nm}$, trots att våglängden kan vara en hundra del av det. En orsak är att den magnetiska linsens brännvidd beror på elektronens fart, och alla elektroner i strålen har inte exakt samma fart.

I ett **svepelektronmikroskop (SEM)** fokuseras strålen till en fin punkt som sveper över provet. Där strålen träffar slås sekundärelektroner loss, och en anod några hundra volt positivt relativt provet samlar upp dem. Strömmen varierar med ytans lutning, och den variationen blir bilden.

	TEM	SEM
Strålen	går genom provet	sveper över ytan
Provet	10–100 nm tunt	får vara tjockt
Det som mäts	transmitterade elektroner	sekundärelektroner från ytan
Upplösning	ca $0,1 \text{ nm}$	ca 10 nm
Bilden	tvärsnitt, inre struktur	ytan, tydligt tredimensionell

⚠ Vanliga fel

- **Fotonformeln används för elektronen.** $\lambda = hc/E$ gäller bara masslösa fotoner. För elektronen är $\lambda = h/p$ med $p = \sqrt{2m_e K}$, eller den relativistiska formeln.

- **Spänning och energi blandas.** En elektron accelererad genom V volt får $K = eV$, alltså V elektronvolt – men i SI-enheter ska K i joule in, eV med $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.
- **Den klassiska formeln används vid hundratals kV.** Jämför alltid K med $m_e c^2 = 511$ keV. Redan vid 100 kV är felet 5 %.
- **Upplösningen sätts lika med våglängden.** Våglängden är en nedre gräns; linsfel gör att TEM i praktiken stannar vid ungefär 0,1 nm.

5. Lösta exempel

≡ Exempel – TEM vid 200 kV

Ett transmissionselektronmikroskop accelererar elektroner från vila genom 200 kV. Bestäm elektronernas de Broglie-våglängd, dels med den klassiska formeln och dels relativistiskt. Hur stort blir felet med den klassiska formeln, och hur många gånger kortare är våglängden än grönt ljus med 550 nm?

Lösning

Energierna. $K = eV = 200$ keV och $m_e c^2 = 511$ keV. Kvoten $K/m_e c^2 \approx 0,39$ är inte liten, så den relativistiska formeln behövs.

Klassiskt.

$$pc = \sqrt{2Km_e c^2} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 511} \text{ keV} = 452 \text{ keV}$$

$$\lambda_{\text{kl}} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{452 \cdot 10^3 \text{ eV}} = \boxed{2,74 \text{ pm}}$$

Fysika: Te ($m_e c^2$, hc)

Relativistiskt.

$$pc = \sqrt{K^2 + 2Km_e c^2} = \sqrt{200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 511} \text{ keV} = 494 \text{ keV}$$

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{494 \cdot 10^3 \text{ eV}} = \boxed{2,51 \text{ pm}}$$

Felet. Den klassiska formeln ger

$$\frac{2,742 - 2,508}{2,508} \approx \boxed{9,3\%}$$

för lång våglängd.

Jämförelse med ljus.

$$\frac{550 \text{ nm}}{2,51 \cdot 10^{-3} \text{ nm}} \approx \boxed{2,19 \cdot 10^5}$$

Att upplösningen ändå bara blir omkring 0,1 nm beror på linsfelen, inte på våglängden.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Elektron eller proton

En elektron och en proton accelereras var för sig från vila genom 1,00 kV. Bestäm de Broglie-våglängden för båda och kvoten mellan dem.

Lösning

Klassiskt räcker. Båda får $K = 1,00 \text{ keV}$, vilket är litet jämfört med både 511 keV och protonens viloenenergi 938 MeV.

Elektronen.

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,00 \cdot 10^3}} = \boxed{3,88 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$$

Protonen. Samma formel med $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$:

$$\lambda_p = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,00 \cdot 10^3}} = \boxed{9,05 \cdot 10^{-13} \text{ m}}$$

Kvoten. Laddning och spänning är desamma, så bara massan skiljer:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1836} \approx \boxed{42,9}$$

Protonen ger alltså kortare våglängd vid samma spänning. Elektronerna används ändå, bland annat för att de är lätta att producera med en glödkatod och böjs lätt av magnetiska linser.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.1 Electron Waves