Egenvärden och egenvektorer

Apr 28, 2026, 13 min read

#linjär-algebra #egenvärde #matris

1. Definition av egenvärde och egenvektor

> 3B1B: Eigenvectors and eigenvalues

1.1 Grundidén

När vi multiplicerar en vektor $\vec{x}$ med en matris A ändras i allmänhet **både riktning och längd**. Men ibland finns speciella vektorer vars **riktning bevaras** — de bara skalas. Dessa är egenvektorerna.

> **Definition: Egenvärde och egenvektor**
>
> Låt A vara en $n \times n$-matris. En **nollskild** vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kallas en **egenvektor** till A om
>
> $$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
>
> för någon skalär λ. Skalären λ kallas ett **egenvärde** till A, och $\vec{x}$ sägs vara en egenvektor **motsvarande** λ.

Intuition: Att multiplicera med A gör i allmänhet en komplicerad transformation — rotation, skjuvning, skalning i olika riktningar. Men längs egenvektorerna gör A bara en enkel skalning med faktorn λ.

> **Nollvektorn är aldrig en egenvektor**
>
> Kravet $\vec{x} \neq \vec{0}$ är viktigt! Annars vore $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ uppfyllt för **alla** A och **alla** λ, vilket ger meningslös information.

Däremot kan $\lambda = 0$ vara ett egenvärde — det betyder att $A\vec{x} = \vec{0}$ har en nontrivial lösning, dvs. A är singulär.

1.2 Geometrisk tolkning

Beroende på tecknet och storleken på λ sker olika saker med egenvektorn:

Värde på λ	Effekt på $\vec{x}$
$\lambda > 1$	Sträcks (samma riktning)
$0 < \lambda < 1$	Krymps (samma riktning)
$\lambda = 1$	Oförändrad ($A\vec{x} = \vec{x}$)
$\lambda = 0$	Skickas till $\vec{0}$
$-1 < \lambda < 0$	Krymps och byter riktning
$\lambda < -1$	Sträcks och byter riktning
$\lambda = -1$	Byter riktning, samma längd

Exempel 1: Verifiera en egenvektor

Exempel 2: Geometriska egenvektorer

---

2. Beräkna egenvärden: den karakteristiska ekvationen

2.1 Härledning

Vi söker λ och $\vec{x} \neq \vec{0}$ sådana att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Skriv om:

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \implies A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0} \implies (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

För att detta ska ha en **nontrivial** lösning ($\vec{x} \neq \vec{0}$) krävs att matrisen $\lambda I - A$ är **singulär**:

> **Sats 5.1.1: Karakteristisk ekvation**
>
> λ är ett egenvärde till A om och bara om
>
> $$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$
>
> Detta kallas den **karakteristiska ekvationen** för A.

Varför $\lambda I - A$ och inte $A - \lambda I$? Båda fungerar! $\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$ (de skiljer sig bara med ett tecken $(-1)^n$, som inte påverkar nollställena). Boken använder $\lambda I - A$ för att det karakteristiska polynomet ska ha positivt ledande koefficient.

2.2 Det karakteristiska polynomet

> **Definition: Karakteristiskt polynom**
>
> Det **karakteristiska polynomet** för en $n \times n$-matris A är
>
> $$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$
>
> Det är ett polynom av grad n i λ, med ledande term λ^n.

Egenvärdena till A är **rötterna** till $p(\lambda) = 0$.

Eftersom ett polynom av grad n har högst n rötter, har en $n \times n$-matris **högst n egenvärden**.

2.3 Räkneexempel

Exempel 3: Egenvärden för 2×2-matris

Exempel 4: Egenvärden för 3×3-matris

Strategi: Hitta rötter till karakteristiska polynomet

1. **Faktorisera direkt** om det är uppenbart
2. **Testa heltalsdivisorer** till konstanttermen (rationella rotsatsen)
3. **Polynomdividera** bort kända rötter för att reducera graden
4. **Andragradsfomeln** för de återstående faktorerna
5. **2×2-trick:** $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$ (se övning 28 i boken)

---

3. Triangulära matriser — egenvärden direkt

Sats 5.1.2: Egenvärden för triangulära matriser

Om A är en **triangulär matris** (övertriangulär, undertriangulär eller diagonal), så är egenvärdena **diagonalelementen**.

Varför? Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

Exempel 5: Egenvärden för triangulär matris

---

4. Hitta egenvektorer och egenrum

4.1 Metod

När vi har hittat ett egenvärde λ finner vi motsvarande egenvektorer genom att lösa det homogena systemet:

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

Definition: Egenrum

Egenrummet (eigenspace) motsvarande egenvärdet λ är lösningsrummet till $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$E_\lambda = \text{null}(\lambda I - A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Egenrummet är ett **delrum** av $\mathbb{R}^n$. Egenvektorerna till λ är de **nollskilda** vektorerna i E_λ.

Koppling till V5L1: Egenrummet E_λ är precis **nollrummet** för matrisen $\lambda I - A$. Vi vet redan hur man hittar baser för `nollrum` — radreducera och identifiera fria variabler!

4.2 Räkneexempel

Exempel 6: Egenrum för 2×2-matris

Exempel 7: Egenrum för 3×3-matris (flerdimensionellt egenrum)

---

5. Tillvägagångssätt — sammanfattning

Metod: Hitta egenvärden och egenvektorer

Steg 1: Beräkna det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Steg 2: Lös $p(\lambda) = 0$ för att hitta egenvärdena.

Steg 3: För varje egenvärde λ_k, lös $(\lambda_k I - A)\vec{x} = \vec{0}$ (radreducera!) för att hitta en bas för egenrummet E_{λ_k}.

---

6. Egenvärden och inverterbarhet

Sats 5.1.4: Egenvärden och inverterbarhet

En kvadratisk matris A är **inverterbar** om och bara om $\lambda = 0$ **inte** är ett egenvärde till A.

Varför? $\lambda = 0$ är ett egenvärde $\iff \det(0 \cdot I - A) = 0 \iff \det(-A) = 0 \iff \det(A) = 0 \iff A$ ej inverterbar.

Alternativ förklaring: $\lambda = 0$ egenvärde betyder att $A\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$ har en nontrivial lösning, dvs. $\operatorname{null}(A) \neq \{\vec{0}\}$, dvs. A är singulär.

---

7. 2×2-trick: snabbformel

Snabbformel för 2×2-matris

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så är det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\operatorname{tr}(A)}\lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\det(A)}$$

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)}$$

Egenvärdena fås direkt med andragradsfomeln:

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Exempel: Snabbformeln

- summa av egenvärden = spåret. Kontroll
- Produkt av egenvärdena blir determinanten

8. Ekvivalenssatsen — utökning

Vi kan nu lägga till ett nytt villkor till den stora ekvivalenssatsen (jfr V5L1 M0067M):

Sats 5.1.5: Ekvivalenta villkor (utökning)

Om A är en $n \times n$-matris, så är följande ekvivalenta:

(a) A är inverterbar (b) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara triviala lösningen (c) A kan radreduceras till I_n (d) A är en produkt av elementärmatriser (e) $A\vec{x} = \vec{b}$ är konsistent för alla $\vec{b}$ (f) $A\vec{x} = \vec{b}$ har exakt en lösning för alla $\vec{b}$ (g) $\det(A) \neq 0$ (h) Kolumnerna i A är linjärt oberoende (i) Raderna i A är linjärt oberoende (j) Kolumnerna spänner upp $\mathbb{R}^n$ (k) Raderna spänner upp $\mathbb{R}^n$ (l) Kolumnerna bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ (m) Raderna bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ (n) $\text{rang}(A) = n$ (o) $\text{null}(A) = \{\vec{0}\}$ (p) $\lambda = 0$ **är inte ett egenvärde till** A ← NYTT

9. Övningsuppgifter

Beräkningsuppgifter

Uppgift 1: Egenvärden och egenvektorer (2×2)

Uppgift 2: Egenvärden och egenvektorer (3×3)

Uppgift 3: Geometrisk tolkning >

Konceptuella uppgifter

Uppgift 4: Sant eller falskt? >

Resurser

Videor

Visuella introduktionen

> 2×2-tricket

- MIT 18.06SC: Eigenvalues and Eigenvectors (Gilbert Strang) — klassisk föreläsning

Interaktiva verktyg

- matrixcalc.org — beräkna egenvärden och egenvektorer online

Wikipedia

- Eigenvalues and eigenvectors
- Characteristic polynomial

Fördjupning

- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Eigenvalues and Eigenvectors