Divergens och rotation

Jun 12, 2026, 9 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Vektorfält, Partiella derivator

---

Två frågor om ett flöde

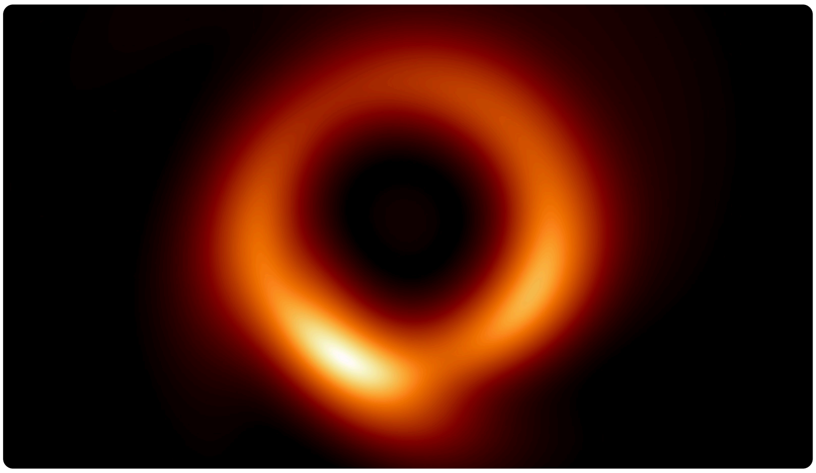
Tänk dig att vektorfältet $\vec{F}$ beskriver hastigheten hos en vätska — vid varje punkt i rummet finns en pil som säger åt vilket håll och hur snabbt vätskan rör sig just där. När man står med ett sådant fält framför sig dyker två frågor upp naturligt:

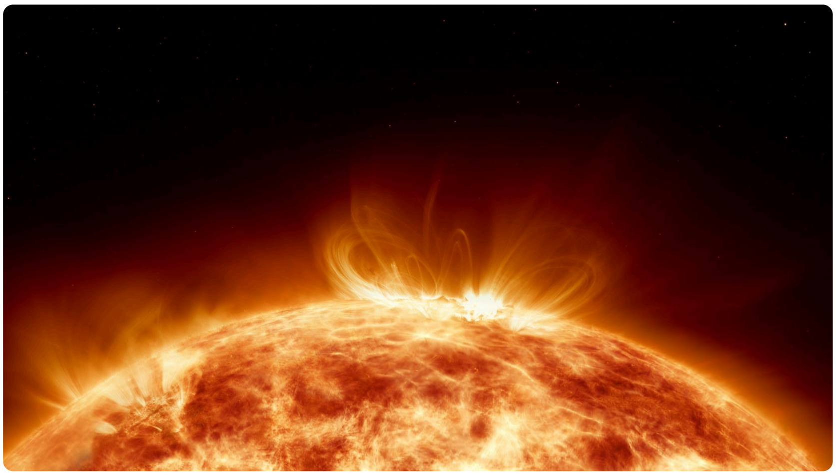
1. **Tar det slut på vatten någonstans?** Finns det punkter där vätska liksom dyker upp ur tomma luften, eller försvinner ner i ett dolt avlopp?
2. **Snurrar det?** Om man stoppar ner en liten skovel i vätskan vid en punkt — börjar den rotera?

Den första frågan svarar **divergensen** på. Den andra svarar **rotationen** på. Det är allt. Resten är bokföring.

Divergens

Föreställ dig en punkt i rummet och en liten boll runt den. Mät hur mycket vätska som flödar **ut** genom bollens yta minus hur mycket som flödar **in**. Krymp sedan bollen ner mot punkten och titta på överskottet per volym. Det talet är divergensen i punkten:





$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

- **Positiv divergens** = en *källa*. Vätska produceras här. Tänk en kran, en gnistrande elektron, en exploderande stjärna.
- **Negativ divergens** = en *sänka*. Vätska försvinner. Avloppet, det svarta hålet, den absorberande antennen.
- **Nolldivergens** = lika mycket in som ut. Vätskan bara *passerar* punkten. Detta kallas att fältet är **inkompressibelt** eller **källfritt**.

Lägg märke till att divergensen är en **skalär** — en siffra per punkt. Den säger inget om åt vilket håll något händer, bara *hur mycket netto-utströmning* det är.

Den mentala bilden

Sätt en osynlig liten badring runt punkten. Räkna pilar som pekar ut, dra bort pilar som pekar in. Resultatet — normerat mot ringens volym när den krymper — är divergensen.

Exempel som bygger intuition

- $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ pekar radiellt utåt från origo, snabbare ju längre ut man kommer. Här pumpar varje punkt ut vätska: $\nabla \cdot \vec{F} = 3$. Hela rummet är en gigantisk källa.
- $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ snurrar runt z-axeln som en virvelström. Vätska tar sig aldrig in eller ut ur en liten boll — den åker bara förbi: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 0)$ ser ut som ett sadelmönster. Trots det är divergensen 0 överallt: vad som strömmar in från ett håll strömmar ut åt ett annat.

Rotation


Här är experimentet: stoppa ner en mikroskopisk skovelhjul (ett *paddle wheel*) vid en punkt. Låt vätskan trycka på skovlarna. Om hjulet börjar snurra är rotationen nollskild — och rotationsvektorn pekar längs hjulets axel, med riktning given av högerhandsregeln:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}$$

Det viktiga är inte formeln utan dess innebörd: **rotationen mäter hur fältet vrider sig kring varje punkt**, lokalt. Längden på vektorn säger hur snabbt skovelhjulet skulle snurra. Riktningen säger åt vilket håll axeln pekar.

> **Lokal är *lokal***
>
> En vätska kan strömma i en stor cirkel utan att rotationen är nollskild — och tvärtom. Det avgörande är inte om vätskan rör sig längs en böjd bana, utan om en *liten* skovel skulle vridas runt sin egen mittpunkt.

Exempel som luras

- $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ snurrar runt z-axeln. En skovel **var som helst** i fältet snurrar — i samma takt och åt samma håll. $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2)$. Hela fältet vrider sig som en stel kropp.
- $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ — det radiella fältet — har $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Trots att fältet "spränger ut" från origo finns ingen lokal vridning. En skovel bara skjuts utåt, den snurrar inte.
- Mer förrädiskt: ett vattenfall som rinner snabbare i mitten än vid kanterna. Vätskan rör sig rakt nedåt överallt, men eftersom flödet är snabbare i mitten kommer en skovel nära kanten att börja snurra (den ena sidan trycks hårdare än den andra). **Rotation kan finnas även där allt rör sig rakt.**

Två oberoende egenskaper

Divergens och rotation mäter olika saker. Ett fält kan ha:

Divergens	Rotation	Exempel
ja	nej	Elektriskt fält från en punktladdning

Divergens	Rotation	Exempel
nej	ja	Magnetfält runt en rak ledare
ja	ja	Allmänt strömningsfält
nej	nej	Ett "snällt" fält — gradient av en harmonisk potential

Det är inte en slump att tabellens fyra fall alla dyker upp i fysiken. **Helmholtz dekompositionsteorem** säger att varje rimligt vektorfält i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som summan av två delar: en helt rotationsfri (gradient av en skalär) och en helt divergensfri (rotation av en vektor). Med andra ord: divergens och rotation är de två "primärfärgerna" som vektorfält målas med.

Vad satsen verkligen säger

Två integralsatser knyter divergens och rotation till saker man kan **mäta** genom integration:

- Gauss sats (divergenssatsen): det totala flödet ut genom en sluten yta är lika med integralen av divergensen över det inneslutna volymen. Bokstavligen: räknar man källor inuti, vet man flödet ut.
- Stokes sats: cirkulationen runt en sluten kurva är lika med integralen av rotationens normalkomponent över en yta som spänns av kurvan. Bokstavligen: räknar man virvlar inuti, vet man cirkulationen runt.

I 2D smälter Stokes sats samman med Greens sats — och rotationen blir bara den ena z -komponenten.

Det här är inte djupa fakta i sig själva. Det är *definitioner*, om man tar dem på allvar: divergensen *är* netto-flödet ut per volym, och rotationen *är* cirkulationen per area. Formlerna med partiella derivator är bara vad de blir när man räknar i kartesiska koordinater.

Identiteter för grad, div och rot

Adams samlar de viktigaste sambanden i ett enda teorem (§17.2, Theorem 3). Låt ϕ, ψ vara skalärfält och $\vec{F}, \vec{G}$ vektorfält, alla tillräckligt deriverbara. Då gäller:

Vector differential identities

Förstaordnings-identiteter (varianter av produktregeln)

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} && \nabla(\phi\psi) = \phi\,\nabla\psi + \psi\,\nabla\phi \\
&\text{(b)} && \nabla\cdot(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{F} + \phi\,(\nabla\cdot\vec{F}) \\
&\text{(c)} && \nabla\times(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\times\vec{F} + \phi\,(\nabla\times\vec{F}) \\
&\text{(d)} && \nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G}) \\
&\text{(e)} && \nabla\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\cdot\vec{G})\vec{F} + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F} - (\nabla\cdot\vec{F})\vec{G} - (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G} \\
&\text{(f)} && \nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{F}\times(\nabla\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\nabla\times\vec{F}) + (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G} + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}
\end{aligned}$$

Andraordnings-identiteter

$$\begin{aligned}
&\text{(g)} && \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0 && (\text{div curl} = 0) \\
&\text{(h)} && \nabla\times(\nabla\phi) = \vec{0} && (\text{curl grad} = 0) \\
&\text{(i)} && \nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F} && (\text{curl curl} = \text{grad div} - \nabla^2)
\end{aligned}$$

Skalärdifferentialoperatorn $(\vec{G}\cdot\nabla)$ i (e) och (f) verkar komponentvis:

$$(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F} = G_1\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}.$$

Laplaceoperatorn definieras för skalärer som $\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$ och för vektorfält komponentvis: $\nabla^2\vec{F} = (\nabla^2 F_1,\, \nabla^2 F_2,\, \nabla^2 F_3)$.

De två som bär hela maskineriet

Identiteterna (g) och (h) — *div curl = 0* och *curl grad = 0* — är de man stöter på överallt:

- **Rotationer har ingen divergens.** Om fältet redan virvlar runt så pumpar det inte också ut vätska. Curlfält är källfria per konstruktion.
- **Gradienter har ingen rotation.** En potentialfunktion definierar ett fält som "bara rinner nedåt" — det kan inte snurra. Konservativa fält är just de rotationsfria (i enkelt sammanhängande områden).

Tillsammans är de ryggraden i Maxwells ekvationer och förklaringen till varför det inte finns magnetiska monopoler. Identitet (i) är den som omvandlar Maxwell-ekvationerna till vågekvationen.

Solenoidalt och irrotationellt

Adams ger två termer som används i resten av kapitlet:

- **Solenoidalt fält:** $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. På tillräckligt snälla områden är ekvivalent: $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ för någon vektorpotential $\vec{G}$.
- **Irrotationellt fält:** $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. På enkelt sammanhängande områden är ekvivalent: $\vec{F} = \nabla\phi$ för någon skalärpotential ϕ.

Var det dyker upp i fysiken

- **Elektriska fält:** $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (laddningar är källor), $\nabla \times \vec{E}$ är nollskild bara när magnetfältet förändras.
- **Magnetiska fält:** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ alltid (inga magnetiska monopoler), $\nabla \times \vec{B}$ ges av strömtätheten.
- **Vätskeflöden:** divergensen är källtätheten, rotationen är virveltätheten.
- **Värmeledning:** temperaturens gradient ger ett strömningsfält vars divergens är värmeproduktion per volym.

Räkneexempel

Exempel 1 — Beräkna och tolka divergensen

Exempel 2 — Rotation i ett skjuvflöde

Exempel 3 — Verifiera att $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (identitet g)

Läsning

- 17.1 Gradient, Divergence, and Curl
- 17.2 Some Identities Involving Grad, Div, and Curl

Se även

- Vektorfält
- Gradient och riktningsderivata
- Gauss sats
- Stokes sats
- Greens sats
- Flödesintegraler
- Kurvintegraler av vektorfält

Resurser

- 3Blue1Brown: Divergence and curl — den definitiva visuella förklaringen.
- Khan Academy: Divergence
- Wikipedia: Helmholtz decomposition