Dimension

Jun 12, 2026, 13 min read

#linjär-algebra #vektorrum

---

1. Alla baser har lika många vektorer

I V4L3 M0067M definierade vi begreppet bas — en linjärt oberoende mängd som spänner upp rummet. En naturlig fråga uppstår: kan olika baser för samma rum ha **olika** antal vektorer?

Svaret är nej. Detta är ett av de mest fundamentala resultaten i linjär algebra.

> **Sats: Alla baser har samma storlek**
>
> Låt V vara ett vektorrum. Om V har en bas med n vektorer, så har **varje** bas för V exakt n vektorer.

Bevisidé: Antag att $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ och $C = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\}$ båda är baser för V.

- Eftersom B är en bas (spänner upp V) och C är linjärt oberoende, måste $m \leq n$ (fler oberoende vektorer än basvektorer kan inte finnas).
- Eftersom C är en bas (spänner upp V) och B är linjärt oberoende, måste $n \leq m$.
- Alltså $m = n$. ∎

> **Varför är detta viktigt?**
>
> Det betyder att antalet basvektorer är en **egenskap hos rummet**, inte hos den specifika basen vi råkar välja. Detta antal förtjänar ett eget namn — **dimensionen**.

---

2. Definition av dimension

> [3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors]

Definition: Dimension

Låt V vara ett vektorrum.

- Om V har en bas med n vektorer kallas V **ändligtdimensionellt** och vi skriver $\dim(V) = n$.
- Om $V = \{\vec{0}\}$ (bara nollvektorn) definierar vi $\dim(V) = 0$.
- Om V inte kan spännas upp av ett ändligt antal vektorer kallas V **oändligtdimensionellt**.

Med andra ord: dimensionen av ett vektorrum V är **antalet vektorer i en (vilken som helst) bas** för V.

---

3. Dimensioner för vanliga vektorrum

Vektorrum	Standardbas	Dimension
$\mathbb{R}^n$	$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$	$\dim(\mathbb{R}^n) = n$
$\mathcal{P}_n$ (polynom grad $\leq n$)	$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$	$\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$
$M_{m \times n}$ (alla $m \times n$-matriser)	Matriser med en etta, resten nollor	$\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$
$\{\vec{0}\}$	$\emptyset$ (tom mängd)	$\dim = 0$

Verifiering av dimensioner

$\mathcal{P}_n$ har dimension $n + 1$, inte n!

Många gör misstaget att tro att $\dim(\mathcal{P}_n) = n$. Men polynomrummet $\mathcal{P}_n$ innehåller polynom av grad $\leq n$, och basen $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ har $n + 1$ **element** (glöm inte konstanttermen!).

Oändligtdimensionella rum

---

4. Centrala satser om dimension

Dimensionen ger oss kraftfulla verktyg för att snabbt avgöra frågor om linjärt oberoende och span.

4.1 Dimensionsbegränsningar

Sats: Övre gräns för oberoende

Om $\dim(V) = n$, så kan **högst** n vektorer i V vara linjärt oberoende.

Ekvivalent: varje mängd med **fler än** n vektorer i V är automatiskt linjärt beroende.

Sats: Undre gräns för uppspänning

Om $\dim(V) = n$, så krävs **minst** n vektorer för att spänna upp V.

Ekvivalent: varje mängd med **färre än** n vektorer kan **inte** spänna upp V.

Snabbslutsatser med dimension

4.2 Genvägen: rätt antal vektorer

Sats: n vektorer i ett n-dimensionellt rum

Låt $\dim(V) = n$ och låt $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en mängd med **exakt** n vektorer i V. Då gäller:

$$S \text{ är linjärt oberoende} \iff S \text{ spänner upp } V \iff S \text{ är en bas för } V$$

Det räcker alltså att kontrollera **ett** av villkoren — det andra följer automatiskt!

Varför? Om vi har exakt n vektorer i ett n-dimensionellt rum:

- Om de är oberoende: vi har n oberoende vektorer, och det maximala antalet oberoende vektorer är n (basens storlek). Att lägga till fler gör dem beroende, så de måste redan spänna upp.
- Om de spänner upp: vi har n vektorer som spänner upp, och det minimala antalet som spänner upp är n. Om de vore beroende kunde vi ta bort en och fortfarande spänna upp med $n-1$ vektorer — men $n-1 < n$ vektorer kan aldrig spänna upp. Motsägelse!

Praktisk nytta

Denna sats halverar arbetet! Om du vet dimensionen av rummet och har rätt antal vektorer behöver du bara kontrollera **ett** av:

- Linjärt oberoende (radreducera, kolla pivoter i varje **kolumn**)
- Spänner upp (radreducera, kolla pivoter i varje **rad**)

4.3 Plus/minus-satsen

Plus/minus-satsen

Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$.

Plus: Om S är en linjärt oberoende mängd i V som **inte** spänner upp V, så finns en vektor $\vec{v} \in V$ sådan att $S \cup \{\vec{v}\}$ fortfarande är linjärt oberoende.

Minus: Om S spänner upp V men **inte** är linjärt oberoende, så finns en vektor i S som kan tas bort utan att minska spannet.

Intuition: Du kan alltid "bygga upp" till en bas genom att lägga till vektorer (plus), eller "trimma ner" till en bas genom att ta bort överflödiga vektorer (minus).

Bygg upp till en bas

Trimma ner till en bas

---

5. Dimension av delrum

Sats: Dimensionssats för delrum

Låt W vara ett delrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V. Då gäller:

1. W är ändligtdimensionellt
2. $\dim(W) \leq \dim(V)$
3. $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

Tolkning:

- Ett delrum kan aldrig ha **högre** dimension än det omgivande rummet.
- Det **enda** delrummet med samma dimension som V är V självt.

Delrum till $\mathbb{R}^3$

Bestäm dimensionen av ett delrum (möjlig tentauppgift)

---

6. Sammanfattning: dimensionsverktyg

Situation	Slutsats
$\dim(V) = n$ och du har $> n$ vektorer	Automatiskt linjärt beroende
$\dim(V) = n$ och du har $< n$ vektorer	Kan inte spänna upp V
$\dim(V) = n$ och du har exakt n vektorer	Oberoende $\iff$ spänner upp $\iff$ bas
W delrum till V	$\dim(W) \leq \dim(V)$
W delrum till V med $\dim(W) = \dim(V)$	$W = V$

---

7. Beslutsträd

Bestäm dimensionen av ett delrum/span

```
flowchart TD
    A["Givet: W = span{v₁, ..., vₚ} ⊆ V"] --> B["Skriv vektorerna som kolumner
    B --> C["Radreducera till\ntrappstegsform"]
    C --> D["Räkna antalet pivoter"]
    D --> E["dim(W) = antal pivoter"]
    E --> F{"Behöver du en bas?"}
    F -- Ja --> G["Välj de ursprungliga vektorer\nsom motsvarar pivotkolumner"]
    F -- Nej --> H["Klar!"]
```

Är mängden en bas? (med dimension)

```
flowchart TD
    A["Givet: {v₁, ..., vₚ} i V med dim(V) = n"] --> B{"p = n?"}
    B -- "p < n" --> NO1["INTE EN BAS\nFör få vektorer — kan inte\nspänna upp V
    B -- "p > n" --> NO2["INTE EN BAS\nFör många vektorer —\nautomatiskt beroe
    B -- "p = n" --> C["Kontrollera ETT av:\n• Linjärt oberoende\n• Spänner up
    C --> D{"Villkoret\nuppfyllt?"}
```

```
D -- Ja --> YES["BAS ✓\n(det andra villkoret\nföljer automatiskt)"]
D -- Nej --> NO3["INTE EN BAS"]
```

---

8. Övningsuppgifter

Dimensionsuppgifter

Uppgift 1: Ange dimensionen

Uppgift 2: Dimension av delrum

Uppgift 3: Dimension av polynomdelrum

Basuppgifter med dimension

Uppgift 4: Bas för $\mathbb{R}^4$?

Uppgift 5: Komplettera till bas

Konceptuella uppgifter

Uppgift 6: Sant eller falskt?

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors (kap 2) — dimension som antal basvektorer
- 3Blue1Brown: Abstract vector spaces (kap 16) — dimension i abstrakta vektorrum
- 3Blue1Brown: Nonsquare matrices as transformations between dimensions (kap 8) — olika dimensioner och transformationer

Wikipedia

- Dimension (vector space)
- Basis (linear algebra)

Fördjupning

- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension

---