Differentialekvationer

Jun 12, 2026, 46 min read

#envariabelanalys #differentialekvation

Inledning

Det finns **ordinära differentialekvationer** (ODE) och **partiella differentialekvationer** (PDE). I kursen M0066M behandlas endast ODE eftersom partiella har fler variabler, och detta är en envariabelkurs.

En ODE är en ekvation som innehåller en okänd funktion och derivator av denna funktion. Ett exempel från boken: $xy'''(x) - 3\sqrt{xy'''(x)} + y'(x) + (\ln x)y(x) = 5e^{2x}$

Vad är en linjär ODE? >

Vad är en homogen ODE? >

Ordning och grad >

Del I: Första ordningens ODE

Separerbara differentialekvationer

Definition: Separabel differentialekvation >

SATS: Lösning av separerbara differentialekvationer

Receptbok: Separerbara ODE

SATS: Omformning till separabel

Vanliga misstag med separerbara ODE

Homogena differentialekvationer (substitution $y = vx$)

Definition: Homogen differentialekvation (av första ordningen)

Receptbok: Homogena ODE med substitution $y = vx$

Härledning: Varför fungerar substitutionen?

Exempel: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

Exempel: $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $x > 0$

Exempel: $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $x > 0$

Exempel med begynnelsevillkor: $y' = \frac{y^2-x^2}{xy}$, $y(1) = 2$

Vanliga misstag >

Linjära första ordningens ODE

Definition: Linjär första ordningens ODE >

Receptbok: Linjära 1:a ordningens ODE (integrerande faktor) >

Vanliga misstag >

Bernoullis ekvation

Definition: Bernoullis ekvation >

Receptbok: Bernoullis ekvation >

Riktningsfält och numeriska metoder

Riktningsfält >

Isoklinmetoden >

Receptbok: Eulers metod

Förbättrade metoder (överkurs)

Del II: Teori för linjära ODE av högre ordning

Grundläggande teori

Allmän form för linjär ODE av ordning n

SATS: Superpositionsprincipen

SATS: Linjärt oberoende och beroende

SATS: Dimension av lösningsrummet

SATS: Struktur för inhomogen ODE

Wronskianen (ej obligatorisk i M0066M)

Del III: Andra ordningens ODE

Homogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ODE:n $y'' + ay' + by = 0$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

Bakgrund: Diskriminanten

Receptbok: 2:a ordningens homogen ODE med konstanta koefficienter

Härledning: Ansats och karakteristisk ekvation

Härledning: Fall 1 ($D > 0$) — Två olika reella rötter

Härledning: Fall 2 ($D < 0$) — Komplexa konjugerade rötter

Härledning: Fall 3 ($D = 0$) — Dubbelrot

Fysikalisk tolkning (komplexa rötter)

Räkneexempel: Homogena ODE

Exempel: $y'' - y' - 2y = 0$

Exempel: $y'' + 4y' + 5y = 0$

Exempel: $y'' + 4y = 0$

Exempel: $y'' + 6y' + 9y = 0$

Exempel med IVP: $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

Exempel med IVP: $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

Inhomogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ekvationer av typen: $y'' + ay' + by = f(x)$ där $f(x) \neq 0$.

SATS: Allmän lösning till inhomogen ODE

Metod 1: Obestämda koefficienter

När fungerar ansatsmetoden?

Receptbok: Obestämda koefficienter

Exempel: $y'' + 3y' + 2y = 10e^{4x}$

Exempel: $y'' - 4y = e^{2x}$ (RESONANS!)

Exempel: $y'' + 4y = \cos(2x)$ (RESONANS med trig!)

Exempel: $y'' + y' - 2y = x^2$

Exempel: $y'' - 2y' + y = e^x$ (DUBBELROT + RESONANS!)

Metod 2: Variation av parametrar

När används variation av parametrar?

Receptbok: Variation av parametrar

Exempel: $y'' + y = \tan x$

Exempel: $y'' + 4y = \sec(2x)$

Jämförelse av metoderna

Reduktion av ordning

När används reduktion av ordning?

Receptbok: Reduktion av ordning (typ 1 — saknar y)

Receptbok: Reduktion av ordning (typ 2 — känd lösning)

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

Definition: Eulers differentialekvation

Receptbok: Eulers differentialekvation

Härledning: Dubbelrotsfallet

Härledning: Komplexa rötter

Exempel: $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0, x > 0$

Exempel: $x^2y'' + xy' + y = 0, x > 0$

Exempel: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, x > 0$

Exempel: $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, x > 0$

OBS: Definitionsområde

Del IV: Högre ordningens ODE

ODE av ordning n med konstanta koefficienter

Allmän form

De fyra fallen för rötter

SATS: Lösningar från karakteristiska ekvationens rötter

Härledning: Fall 1 — Enkel reell rot

Härledning: Fall 2 — Enkelt komplext rotpar

Härledning: Fall 3 — Reell rot med multiplicitet m

Härledning: Fall 4 — Komplext rotpar med multiplicitet m

Receptbok: Högre ordningens ODE

Räkneexempel: Homogena ODE av högre ordning

Exempel 1: $y''' - y'' - y' + y = 0$

Exempel 2: $y''' - y'' - y' + y = e^x$ (inhomogen)

Exempel 3: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Exempel 4: $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-3x}$

Exempel 5: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Exempel 6: $y^{(4)} - y = 0$

Exempel 7: $y''' + y'' - y' - y = 0$

Exempel 8: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

Definition: Eulers differentialekvation

Receptbok: Eulers differentialekvation via substitution

Härledning: Transformationsformler för derivator

Exempel 9: $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32\ln x$, $x > 0$

Exempel: $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, $x > 0$ (kontrollexempel)

Jämförelse: Substitution vs direktansats

OBS: Definitionsområde

Del V: Tillämpningar

Befolkningsmodeller

Exponentiell tillväxt och avtagande >

Receptbok: Exponentiell tillväxt/sönderfall >

Logistisk tillväxt >

Newtons avsvalningslag

Receptbok: Newtons avsvalningslag >

Mekaniska svängningar

Fjäder-massa-system >

Receptbok: Fria svängningar >

Resonans >

Elektriska kretsar

RLC-kretsar >

Läsning

- Chapter 19 Ordinary Differential Equations
