Determinanter

Jun 12, 2026, 5 min read

#linjär-algebra #determinant #matris

> **Kapitel:** 2.1–2.3 · **Ämne:** Linjär algebra **Förkunskaper:** Matriser, Linjära ekvationssystem

---

1. Determinanter – Översikt

> 3B1B: The determinant

Determinanter är definierade för **kvadratiska matriser** ($n \times n$).

Notation

$$\det(A) = |A|$$

---

2. Beräkning av determinanter

2.1 1×1 matris

$$\det([a]) = a$$

2.2 2×2 matris

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boxed{ad - bc}$$

2.3 $n \times n$ matris – Kofaktorutveckling

Stryk rad i och kolumn j, ta determinanten av det som blir kvar.

Minor: M_{ij} = determinanten av $(n-1) \times (n-1)$ matrisen

Kofaktor:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Använd **utveckling efter rad eller kolumn** (rekursiv definition):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot c_{1j}$$

där c_{1j} är kofaktorn.

Teckenmönster för kofaktorer >

Komplexitet >

---

3. Utveckling efter rad eller kolumn

Utveckling efter rad 1:

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{1j}$$

Utveckling efter kolumn j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$$

Sats

Utveckling efter **vilken rad eller kolumn som helst** ger samma determinant.

Beräkna determinanten >

Välj rad/kolumn med många nollor >

4. Viktiga satser

Sats	Beskrivning
$\det(A) = \det(A^T)$	Determinanten är samma för transponatet
Triangulär matris	$\det =$ produkten av diagonalelementen
$\det(I) = 1$	Identitetsmatrisens determinant
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$	Multiplikativ egenskap
$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar	Kriterium för inverterbarhet

Transponat

$$\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$$

Triangulära matriser

För en triangulär matris (över- eller undertriangulär) är determinanten **produkten av diagonalelementen**.

Linjäritet

Determinanten är **linjär i varje rad och kolumn**:

- Homogen: $\det(kA) = k^n \det(A)$ för $n \times n$ matris
- Additiv i varje rad/kolumn separat

5. Effekt av radoperationer

Operation	Effekt på $\det$
Byta plats på två rader	$\det \to -\det$
Multiplicera rad med k	$\det \to k \cdot \det$
Addera multipel av rad till annan	$\det$ oförändrad

Konsekvens

Om två rader (eller kolumner) är:

- **Lika:** $\det(A) = 0$
- **Multiplar av varandra:** $\det(A) = 0$

---

6. Två metoder för att beräkna determinant

1. **Utveckling efter rad/kolumn** — Välj rad/kolumn med många nollor
2. **Gausseliminera till triangulär form** — Ta produkten av diagonalen

Beräkna med elementära matriser

Beräkna determinant med Gausselimination

Metod: Reducera till triangulär form och ta produkten av diagonalen.

Exempel

---

7. Singulära matriser

Definition: En matris är **singulär** om den ej är inverterbar.

$$A \text{ singulär} \iff \det(A) = 0$$

8. Cramers regel

> 3B1B: Cramer's rule, explained geometrically

8.1 Lemma

Om AB är inverterbar så är både A och B inverterbara.

8.2 Cramers regel

För systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ med $\det(A) \neq 0$:

$$\boxed{x_j = \frac{\det(A_j(\vec{b}))}{\det(A)}}$$

där $A_j(\vec{b})$ är matrisen A med kolumn j ersatt av $\vec{b}$.

Se även

- Linjära ekvationssystem
- Matriser
- Cramers regel

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: The determinant (kap 6) — geometrisk tolkning av determinanten som area/volym
- 3Blue1Brown: Cramer's rule, explained geometrically (kap 12) — visuell förklaring av Cramers regel
- 3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space (kap 7) — singulära matriser och $\det = 0$

Interaktiva verktyg

- matrixcalc.org: Determinant Calculator — beräkna med visade steg
- Falstad: Matrix Simulation — se hur determinanten förändras
- Desmos Matrix Calculator
- matrixcalc.org — beräkna determinanter online

Wikipedia

- Determinant
- Cramer's rule
- Cofactor expansion

Fördjupning

- Immersive Linear Algebra — Chapter 7: Determinants — interaktiv 3D-bok
- MIT 18.06SC: Properties of Determinants
