

De Broglie-våglängd

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Bohrs modell för väteatomen

Om ljus med våglängden λ bär rörelsemängden $p = h/\lambda$, föreslog de Broglie år 1924 att sambandet kan vändas: varje partikel med rörelsemängden p har en våglängd. För en elektron accelererad genom en spänning blir våglängden av storleksordningen 10^{-10} m, alltså jämförbar med atomavstånd, medan den 1836 gånger tyngre protonen får en motsvarande kortare. Antagandet förklarar också Bohrs kvantisering villkor: en bana måste rymma ett helt antal våglängder, $2\pi r_n = n\lambda$, vilket ger kvantiseringen av L_n utan postulat.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$$

Fysika: Fd3

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda}_{\text{partikelns våglängd}} = \frac{h}{\underbrace{p}_{\text{rörelse-mängd}}} = \frac{h}{\sqrt{2m \underbrace{K}_{\text{rörelse-energi}}}}$$

Samma samband som för fotonen, $p = h/\lambda$, men läst baklänges: större rörelsemängd ger kortare våglängd. För en partikel med massa växer p bara som $\sqrt{K}$, så fyra gånger rörelseenergin halverar våglängden.

1. Våglängd och frekvens för en partikel

De Broglie gav partikeln samma två samband som **fotonen** har: våglängden bestäms av rörelsemängden som i rutan ovan, och frekvensen av energin,

$$f = \frac{E}{h}$$

Men de övriga fotsambanden gäller *inte* för en partikel med massa. Den rör sig inte med ljusfarten, så $f = c/\lambda$ och $E = pc$ är fel. För en icke-relativistisk partikel kopplas rörelsemängden i stället till den kinetiska energin:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mK}$$

vilket ger den sista formen i rutan, $\lambda = h/\sqrt{2mK}$. Våglängden är alltså omvänt proportionell mot $\sqrt{K}$ för en partikel men mot E för en foton.

2. Elektron accelererad genom en spänning

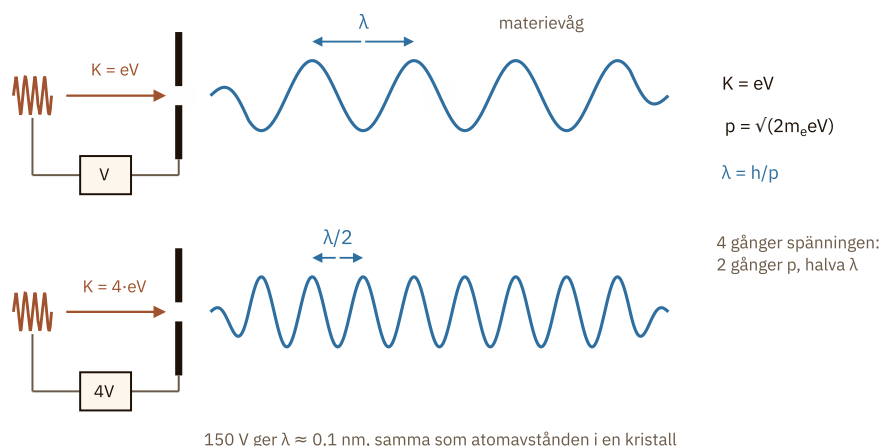
En elektron som startar från vila och accelereras genom spänningen V får den kinetiska energin $K = eV$. Insatt i $\lambda = h/\sqrt{2mK}$:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}}$$

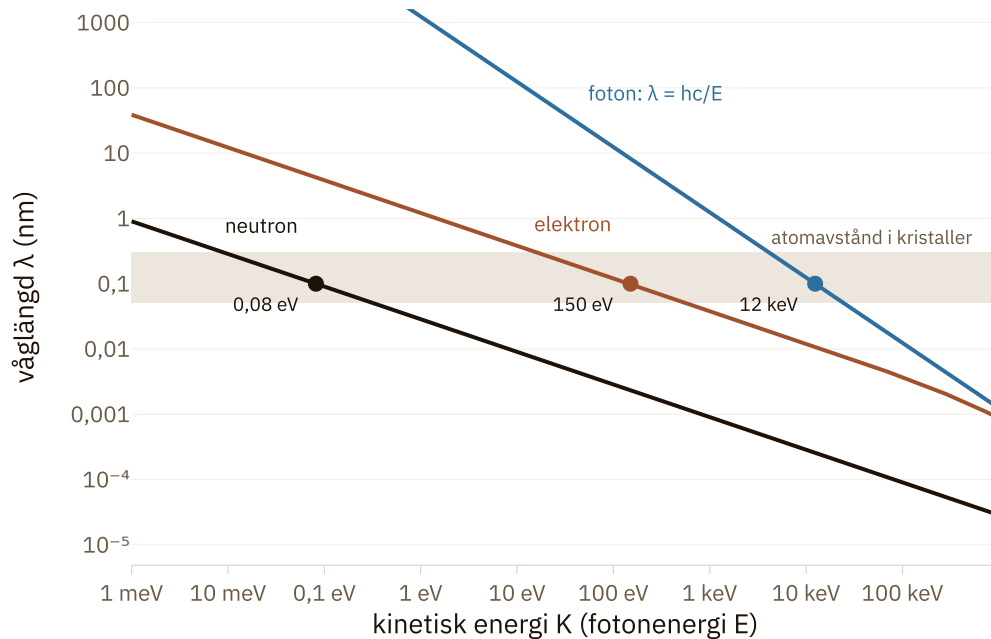
Med konstanterna insatta blir det en praktisk tumregel, med V i volt:

$$\lambda \approx \frac{1,226}{\sqrt{V}} \text{ nm}$$

Redan 150 V ger $\lambda \approx 0,100$ nm, samma storlek som avståndet mellan atomerna i en kristall — därför kan elektroner visa **diffraction** mot kristaller. Fyra gånger högre spänning halverar våglängden.



En elektronkanon: elektronerna faller genom spänningen V och får $K = eV$, och deras våglängd blir $\lambda = h/\sqrt{2m_e eV}$. Fyra gånger högre spänning dubblar rörelsemängden och halverar våglängden.



Våglängd mot energi för foton, elektron och neutron. För att nå $\lambda = 0,1 \text{ nm}$ (skuggat band) behöver fotonen 12 keV, elektronen 150 eV och neutronen bara 0,08 eV. Fotonlinjen har lutningen -1 och partikellinjerna $-1/2$, tills elektronen blir relativistisk och böjer av mot fotonens lutning.

3. Relativistiska partiklar

När den kinetiska energin inte längre är liten jämfört med viloenenergin mc^2 – för elektroner 511 keV – måste rörelsemängden tas ur det relativistiska sambandet $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ med $E = K + mc^2$:

$$(K + mc^2)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}$$

- $K \ll mc^2$: K^2 försummas, och vi får tillbaka $\lambda = h/\sqrt{2mK}$.
- $K \gg mc^2$: $\lambda \approx hc/K$, samma som för en foton med energin K .

Den klassiska formeln ger för lång våglängd, och felet är ungefär $K/(4mc^2)$. För elektroner blir det 1 % vid omkring 20 keV; i elektronmikroskop, med 40–400 keV, måste man räkna relativistiskt.

4. Varför vi inte ser materievågor i vardagen

Vågeffekter som diffraktion märks bara när våglängden är jämförbar med hindret eller öppningen. En tennisboll på 57 g med farten 50 m/s har

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{0,057 \cdot 50} = 2,3 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

Fysika: Te (h)

— långt under storleken av en atomkärna. Det är Plancks konstants litenhet som gör vardagsföremålens vågnatur omärkbar. För elektroner i atomer är däremot λ lika stor som atomen själv, och där bestämmer vågnaturen allt: Bohrs kvantiseringsvillkor är just kravet att en stående elektronvåg ska få plats runt banan, se [Bohrs modell för väteatomen](#).

Vanliga fel

- **Fotonformler används för elektroner.** $f = c/\lambda$ och $E = pc$ gäller bara för masslösa partiklar. För en elektron är $p = \sqrt{2mK}$.
- **eV och J blandas.** I $\lambda = h/\sqrt{2mK}$ med SI-enheter ska K vara i joule: $K = eV$ med $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- **Fel massa.** En proton eller neutron med samma kinetiska energi som en elektron har ungefär $\sqrt{1836} \approx 43$ gånger kortare våglängd.
- **Klassisk formel vid höga energier.** Över ett tiotal keV för elektroner blir felet märkbart; använd $\lambda = hc/\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}$.
- **Samma energi tros ge samma våglängd.** En foton och en elektron med samma energi har mycket olika våglängder, eftersom de har olika samband mellan energi och rörelsemängd.

5. Lösta exempel

Exempel – Elektron och foton med samma energi

En elektron har den kinetiska energin 150 eV, och en foton har energin 150 eV. Bestäm båda våglängderna och kvoten mellan elektronens och fotonens rörelsemängd.

Lösning

Elektronen. $K = 150 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,403 \cdot 10^{-17} \text{ J}$, så

$$p_e = \sqrt{2m_e K} = \sqrt{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,403 \cdot 10^{-17}} = 6,62 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{6,62 \cdot 10^{-24}} = \boxed{0,100 \text{ nm}}$$

Fotonen.

$$\lambda_f = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{150 \text{ eV}} = \boxed{8,27 \text{ nm}}$$

Kvoten. Fotonen har $p_f = E/c$, så med $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$:

$$\frac{p_e}{p_f} = \frac{\sqrt{2m_e K}}{K/c} = \sqrt{\frac{2m_e c^2}{K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 511\,000}{150}} = \boxed{82,5}$$

Samma kvot fås som λ_f/λ_e , eftersom $p = h/\lambda$ för båda. Vid samma energi har elektronen alltså mycket större rörelsemängd och mycket kortare våglängd.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Elektroner i ett elektronmikroskop

I ett transmissionselektronmikroskop accelereras elektroner från vila genom spänningen 100 kV. Bestäm de Broglie-våglängden, dels med den klassiska formeln och dels relativistiskt. Hur stort blir det relativa felet om man räknar klassiskt?

Lösning

Klassiskt. Tumregeln ger

$$\lambda_{kl} = \frac{1,226}{\sqrt{1,00 \cdot 10^5}} \text{ nm} = 3,88 \cdot 10^{-3} \text{ nm} = \boxed{3,88 \text{ pm}}$$

Relativistiskt. Med $K = 100 \text{ keV}$, $mc^2 = 511 \text{ keV}$ och $hc = 1,240 \text{ keV} \cdot \text{nm}$:

$$\sqrt{K^2 + 2Kmc^2} = \sqrt{100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 511} = \sqrt{112\,200} = 335 \text{ keV}$$

$$\lambda = \frac{1,240 \text{ keV} \cdot \text{nm}}{335 \text{ keV}} = 3,70 \cdot 10^{-3} \text{ nm} = \boxed{3,70 \text{ pm}}$$

Felet.

$$\frac{3,88 - 3,70}{3,70} \approx \boxed{4,8 \%}$$

Det stämmer med uppskattningen $K/(4mc^2) = 100/2044 \approx 4,9 \%$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.1 Electron Waves
.....