

Centrala gränsvärdessatsen

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Medelvärdets fördelning

Centrala gränsvärdessatsen säger att summan av många oberoende, likafördelade stokastiska variabler är approximativt normalfördelad, oavsett hur de enskilda variablerna är fördelade. Det förklarar varför normalfördelningen dyker upp så ofta, och gör den användbar även när grundfördelningen är okänd.

1. Satsen

Låt $\xi_1, \xi_2, \dots$ vara oberoende och likafördelade med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Då gäller för stora n approximativt

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n}), \quad \bar{\xi} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

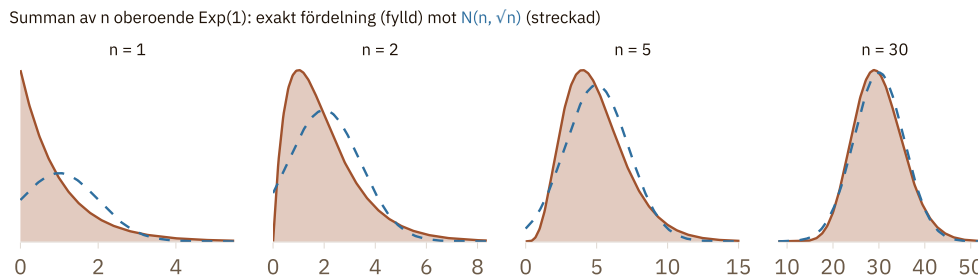
Väntevärdet och standardavvikelsen är exakt desamma som i **medelvärdets fördelning** — det enda satsen tillför är **formen**: den blir normal, vilken fördelning ξ_i än har.

Exakt eller approximativt

Är ξ_i själva normalfördelade är summan **exakt** normalfördelad för varje n , se **Summor av normalfördelade stokastiska variabler**. Centrala gränsvärdessatsen behövs när de inte är det, och ger då en approximation som blir bättre ju större n är.

2. Hur stort måste n vara?

Det beror på hur olik normalfördelningen grundfördelningen är. Summerar vi **exponentialfördelade** variabler, som är kraftigt skeva, syns fortfarande skevheten vid $n = 5$, men vid $n = 30$ är summan nästan omöjlig att skilja från normalkurvan:



För en symmetrisk grundfördelning räcker betydligt mindre n .

Känn igen situationen

Signalen i en uppgift är en **summa** eller ett **medelvärde** av **många oberoende** bidrag — antal bilar i 1000 hushåll, totalvikten av 100 förpackningar, positionen efter 600 slumpsteg. Skriv då storheten som $\sum \xi_i$, bestäm $E(\xi_i)$ och $V(\xi_i)$, och använd satsen.

Ett viktigt specialfall är när ξ_i bara antar värdena 0 och 1: då är summan binomialfördelad, och satsen ger **normalapproximationen** av binomialfördelningen.

Vanliga fel

- **Satsen gäller summan, inte varje term.** De enskilda ξ_i blir inte normalfördelade; det är $\sum \xi_i$ och $\bar{\xi}$ som blir approximativt normalfördelade.
- **Glömma kraven.** Termerna ska vara oberoende och likafördelade med ändlig varians, och n tillräckligt stort.
- **Halvkorrektion för heltalsvariabler.** Approximeras en diskret summa med $N(\mu, \sigma)$ räknas $P(\xi \leq k)$ som $\Phi((k + 0,5 - \mu)/\sigma)$; se **Normalapproximation**.

3. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 10, övning 5 – Slumpvandring i 10 minuter

En partikel startar på talet 0 och hoppar varje sekund ett steg, i negativ eller positiv riktning med sannolikheten 0,5 vardera. Beräkna sannolikheten att partikeln efter 10 minuter befinner sig i spannet från -50 till 50 .

Lösning

Som summa av steg. Låt ξ_k = hoppet i sekund k , $k = 1, \dots, 600$. Hoppen är oberoende och

$$E(\xi_k) = 1 \cdot 0,5 + (-1) \cdot 0,5 = 0, \quad V(\xi_k) = 1^2 \cdot 0,5 + (-1)^2 \cdot 0,5 - 0^2 = 1$$

Positionen efter 600 sekunder är $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_{600}$. Enligt centrala gränsvärdessatsen är approximativt

$$\xi \approx N(0, \sqrt{600}) = N(0; 24,49)$$

Sannolikheten.

$$P(-50 < \xi < 50) \approx \Phi\left(\frac{50}{24,49}\right) - \Phi\left(-\frac{50}{24,49}\right) = 2\Phi(2,04) - 1 \approx \boxed{0,959}$$

Alternativ väg. Låt η = antal steg i positiv riktning, $\eta \in \text{Bin}(600, 0,5)$, så att $\xi = \eta - (600 - \eta) = 2\eta - 600$. Då är $E(\xi) = 2 \cdot 300 - 600 = 0$ och $V(\xi) = 4 \cdot 150 = 600$, samma fördelning som ovan.

På räknaren. `normCdf(-50, 50, 0, sqrt(600))`. Den exakta sannolikheten går också att få, eftersom $-50 < \xi < 50$ betyder $276 \leq \eta \leq 324$: `binomCdf(600, 0.5, 276, 324)` ger 0,954 – approximationen är god.

Facit: 0,9586. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Se även

- [Medelvärdets fördelning](#)
- [Summor av normalfördelade stokastiska variabler](#)
- [Normalapproximation](#)
- [Normalfördelning](#)
- [Statistisk inferens](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: But what is the Central Limit Theorem?](#) — visar hur summor av vilken fördelning som helst blir klockformade
 - [Wikipedia: Centrala gränsvärdessatsen](#)
-
-