

Bohrs modell för väteatomen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

Kurs: F0005T Förkunskaper: Bohrs atommodell, Rörelsemängdsmoment

Bohr antog att elektronen rör sig i stabila banor och att rörelsemängdsmomentet är kvantiserat i enheter av $h/2\pi$. Tillsammans med Coulombkraften som centripetalkraft ger det banradier och hastigheter som bara beror på huvudkvanttalet n – det var därför det kom att kallas kvantmekanik. Minsta radien är Bohrradien $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m, och därefter följer $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ och så vidare. Den totala energin blir $E_n = K_n + U_n = -K_n$, och energin för att ta elektronen från grundtillståndet till $E_\infty = 0$ är väteets joniseringsenergi 13,6 eV.

$$L_n = mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \quad E_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2 h^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

Fysika: Fd3 (i formen $E_n = -E_H Z^2/n^2$ med $Z = 1$), Te (E_H)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{mv_n r_n}_{\text{rörelsemängds-
moment } L_n} = \underbrace{n}_{\substack{\text{heltal} \\ 1, 2, 3, \dots}} \underbrace{\frac{h}{2\pi}}_{\text{kvantum
för } L}$$
$$\underbrace{E_n}_{\text{energin i
bana } n} = - \underbrace{\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}}_{\substack{\text{bindningen} \\ \text{avtar som } 1/n^2}}$$

Villkoret väljer ut de banor där elektronvågen går jämnt upp runt kärnan. Energin är negativ eftersom elektronen är bunden; ju högre n , desto närmare noll och desto lättare att jonisera atomen.

1. Kvantiseringsvillkoret

Klassiskt kan elektronen kretsas på vilket avstånd som helst, och då kan atomen ha vilken energi som helst – i strid med **linjespektrumet**. Bohr behöll den klassiska cirkelbanan men lade till ett villkor: **rörelsemängdsmomentet** får bara vara en heltalsmultipel av $h/2\pi$, som i rutan ovan. Heltalet $n = 1, 2, 3, \dots$ kallas **huvudkvanttalet**. Dessutom postulerade han att elektronen inte strålar så länge den stannar i en tillåten bana; atomen avger eller tar upp energi bara när elektronen byter bana (se **Bohrs atommodell**).

Villkoret går att läsa som ett vågvillkor. Ger vi elektronen **de Broglie-våglängden** $\lambda_n = h/(mv_n)$ och kräver att banans omkrets rymmer ett helt antal våglängder, så får vi

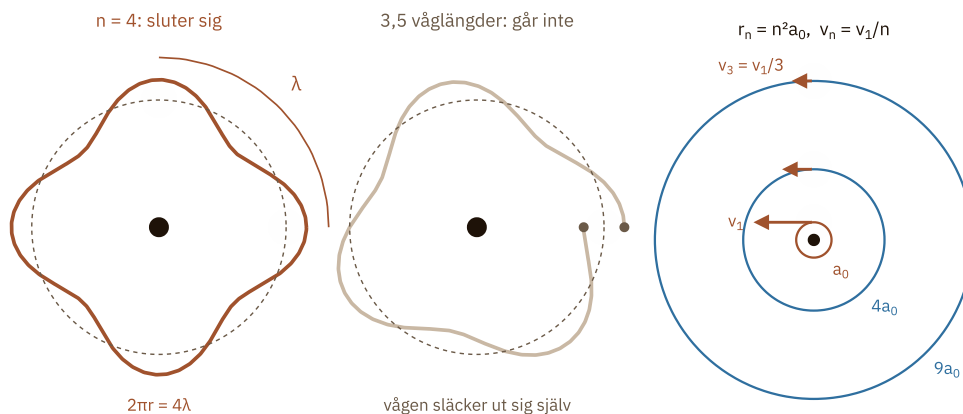
$$2\pi r_n = n\lambda_n$$

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv_n}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

vilket är precis Bohrs villkor. Elektronen i en tillåten bana är en stående våg som sluter sig själv.



Vänster: med fyra de Broglie-våglängder på omkretsen möter vågen sig själv i fas och bildar en stående våg. Mitten: 3,5 våglängder går inte jämnt upp. Höger: de tre första banorna i skala, $r_n = n^2 a_0$, med farten $v_n = v_1/n$.

2. Banradier och hastigheter

Protonen är nästan 2000 gånger tyngre än elektronen, så vi låter den stå still. Coulombkraften mellan protonen och elektronen är den centripetalkraft som håller elektronen i cirkelbanan:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}$$

Tillsammans med kvantiseringsvillkoret är det två ekvationer för de två obekanta r_n och v_n .

Härledning av r_n och v_n

Förenkla kraftekvationen. Multiplicera med r_n :

$$mv_n^2 r_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Dela med kvantiseringsvillkoret. Vänsterledet delat med $mv_n r_n = nh/2\pi$ blir v_n :

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{nh}$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 nh}$$

Radien. Lös ut r_n ur kvantiseringsvillkoret och sätt in v_n :

$$r_n = \frac{nh}{2\pi m v_n} = \frac{nh}{2\pi m} \cdot \frac{2\epsilon_0 nh}{e^2}$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_0 \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 nh} = \frac{v_1}{n}$$

Fysika: Fd3 (banradie $r_n = a_0 n^2 / Z$ med $Z = 1$)

Med konstanterna insatta blir

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Fysika: Te (a_0)

- **Radien växer som n^2 :** $a_0, 4a_0, 9a_0, \dots$ Grundtillståndets diameter på ungefär 0,1 nm stämmer med atomstorlekar mätta på andra sätt.

- **Farten avtar som $1/n$.** Även den största farten v_1 är under 1 % av ljusfarten ($v_1/c \approx 1/137$), så klassisk mekanik räcker.

3. Kinetisk, potentiell och total energi

Med r_n och v_n kända kan varje energi skrivas som funktion av n . Den potentiella energin sätts till noll när elektronen är oändligt långt bort, så den är negativ i varje bana:

$$K_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2}$$

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{4n^2h^2}$$

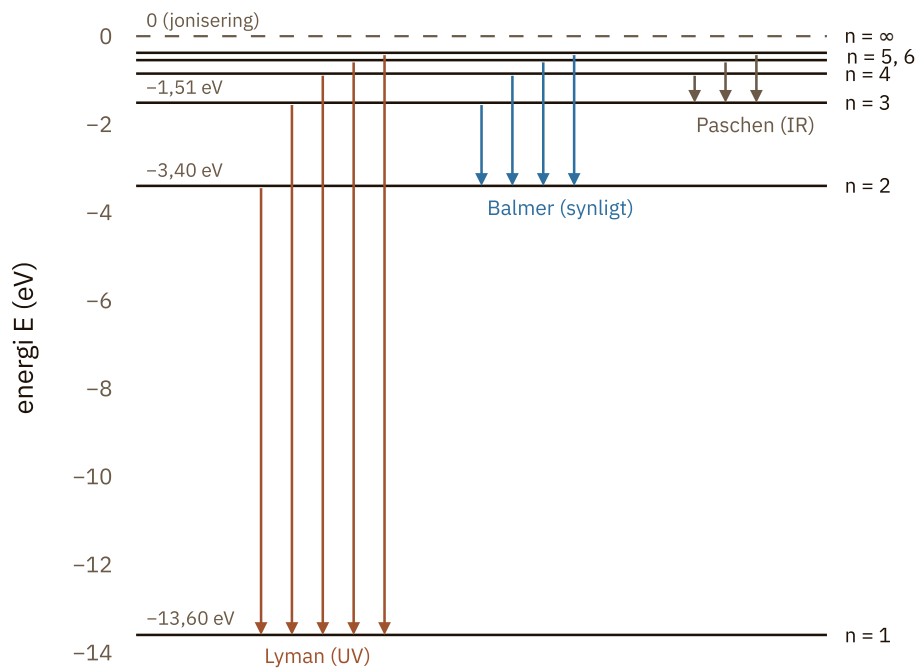
Den potentiella energin är alltså exakt -2 gånger den kinetiska, och summan blir energin i rutan överst:

$$E_n = K_n + U_n = -K_n = \frac{U_n}{2}$$

I elektronvolt är $K_n = 13,6 \text{ eV}/n^2$, $U_n = -27,2 \text{ eV}/n^2$ och $E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$. Samma fördelning gäller för satellitbanor, eftersom både gravitationen och Coulombkraften avtar som $1/r^2$.

4. Energinivådiagrammet och joniseringsenergin

Nivåerna ligger tätare ju högre upp vi kommer och hopar sig under $E_\infty = 0$. Ovanför noll är elektronen fri och kan ha vilken energi som helst. Varje pil i diagrammet är en övergång $n_U \rightarrow n_L$ där en foton med energin $E_{n_U} - E_{n_L}$ sänds ut; våglängderna ges av **Rydbergs formel**.



Vätets energinivåer $E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$. Pilarna är övergångarna i Lyman-, Balmer- och Paschenserien; seriens namn bestäms av den undre nivån.

Joniseringsenergin är den energi som krävs för att lyfta elektronen från nivå n till $E_\infty = 0$:

$$E_{\text{jon},n} = 0 - E_n = \frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

Från grundtillståndet ger modellen 13,606 eV, mot det uppmätta 13,60 eV. Den lilla skillnaden kommer av att protonen inte står still, se **Reducerad massa**.

⚠ Vanliga fel

- **Tecknet på E_n .** Energierna är negativa, och en högre nivå har *mindre negativ* energi: $E_3 = -1,51 \text{ eV}$ ligger över $E_2 = -3,40 \text{ eV}$.
- **K och E rör sig åt olika håll.** När atomen exciteras ökar E_n , men $K_n = -E_n$ minskar — elektronen går långsammare i den större banan. U_n ökar dubbelt så mycket som E_n .
- **Radien skalar som n^2 , inte n .** $r_3 = 9a_0$, inte $3a_0$.
- **Joniseringsenergin från en exciterad nivå** är $13,6 \text{ eV}/n^2$, inte $13,6 \text{ eV}$.

5. Lösta exempel

≡ Exempel – Elektronen i $n = 2$ som stående våg

En väteatom är i sitt första exciterade tillstånd, $n = 2$. Bestäm elektronens banradie, fart och omloppstid enligt Bohrs modell. Beräkna också elektronens de Broglie-våglängd och visa att banans omkrets rymmer precis två våglängder.

Lösning

Radien. $r_n = n^2 a_0$ ger

$$r_2 = 4 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} = \boxed{2,12 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$

Farten. $v_n = v_1/n$ ger

$$v_2 = \frac{2,19 \cdot 10^6}{2} = \boxed{1,09 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

Omloppstiden.

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 2,12 \cdot 10^{-10}}{1,09 \cdot 10^6} = \boxed{1,22 \cdot 10^{-15} \text{ s}}$$

De Broglie-våglängden.

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_e v_2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,094 \cdot 10^6} = \boxed{6,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$

Kontroll av omkretsen.

$$2\pi r_2 = 2\pi \cdot 2,117 \cdot 10^{-10} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2 \cdot 6,65 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2\lambda_2$$

Omkretsen rymmer exakt $n = 2$ våglängder, som kvantisering villkoret kräver.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Exempel – Banradien blir nio gånger så stor

En väteatom i grundtillståndet absorberar en foton, och därefter är elektronens banradie nio gånger så stor som förut. Bestäm fotonens våglängd. Hur mycket ändras elektronens kinetiska energi respektive atomens potentiella energi?

Lösning

Slutnivån. $r_n = n^2 a_0 = 9a_0$ ger $n = 3$.

Fotonenergin.

$$E_3 - E_1 = -\frac{13,6}{9} - (-13,6) = -1,51 + 13,6 = 12,1 \text{ eV}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{12,09 \text{ eV}} = \boxed{103 \text{ nm}}$$

Det är ultraviolett ljus, den andra linjen i Lymanserien.

Kinetiska energin. $K_n = 13,6 \text{ eV}/n^2$:

$$\Delta K = 1,51 - 13,6 = \boxed{-12,1 \text{ eV}}$$

Potentiella energin. $U_n = -27,2 \text{ eV}/n^2$:

$$\Delta U = -3,02 - (-27,2) = \boxed{+24,2 \text{ eV}}$$

Rimlighetskontroll. $\Delta K + \Delta U = -12,1 + 24,2 = 12,1 \text{ eV}$, vilket är fotonens energi.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom
