

Binomialkoefficient

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #kombinatorik #formel

Kurs: S0008M Förkunskaper: Multiplikationsprincipen

Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ är antalet sätt att välja k element bland n utan återläggning och utan hänsyn till ordningen. Den följer ur **multiplikationsprincipen** genom att vi delar bort de inbördes ordningarna.

1. Sats 2.1

Antalet sätt att välja ut k element bland n **utan återläggning** och **utan hänsyn till ordningen** bland de utvalda är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ faktorer}}}{\underbrace{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}_{k \text{ faktorer}}}$$

med $k! = k(k-1)\cdots 2 \cdot 1$ och konventionerna $0! = 1$ och $\binom{n}{0} = 1$. Beteckningen $\binom{n}{k}$ läses "n över k" och är bara ett kortare sätt att skriva bråket.

2. Varför

Anta att det går att välja k element bland n utan hänsyn till ordning på x sätt. Vi räknar de **ordnade** valen på två olika sätt:

- Direkt med multiplikationsprincipen: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ sätt.
- Först välja de k elementen på x sätt och sedan ordna dem inbördes på $k!$ sätt: $x \cdot k!$.

Båda räknar samma sak, så

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = x \cdot k! \quad \implies \quad x = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

3. Räkna för hand

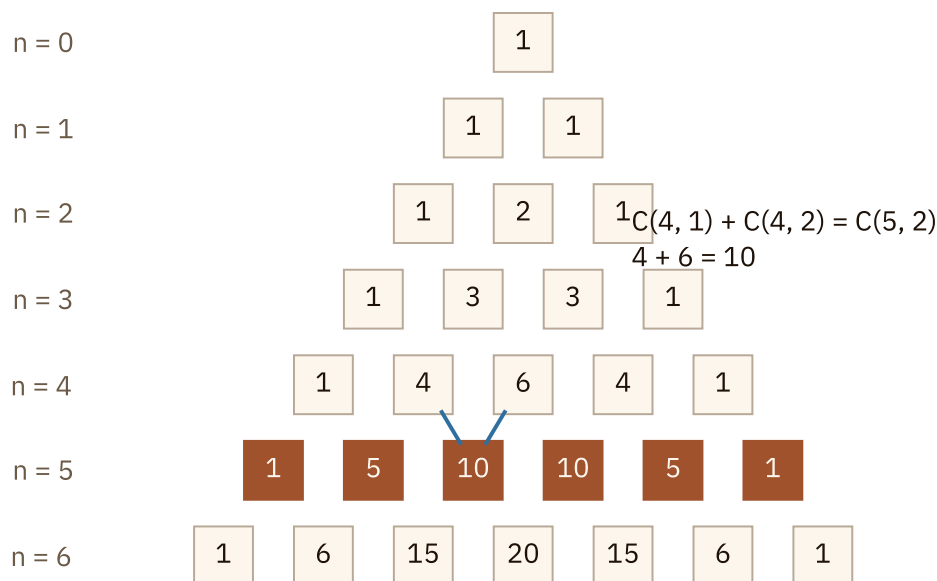
 Bråket i mitten är det som räknas för hand

$\binom{20}{5}$ blir $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ – fem faktorer uppe, fem nere, och det mesta förkortas bort innan vi multiplicerar. Fakultetsformen är bra för bevis, men ingen räknar ut $20!$.

Två egenskaper sparar räknearbete:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Den första säger att välja ut k är samma sak som att välja bort $n - k$, så $\binom{35}{33} = \binom{35}{2} = 595$. Den andra säger att ett visst element antingen är med (då ska $k - 1$ till väljas bland de andra $n - 1$) eller inte (då ska alla k väljas bland de $n - 1$). Den bygger upp **Pascals triangel**, där varje tal är summan av de två ovanför:



Rad n innehåller $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$ och summerar till 2^n , antalet delmängder av en mängd med n element.

På räknaren heter funktionen `nCr` (menu → Probability → Combinations): `nCr(20,5)` ger 15 504.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 1, övning 4 – Lottorader

På hur många sätt kan vi välja 7 nummer bland 35 utan återläggning och utan hänsyn till ordningen bland de utvalda? Resonera utifrån multiplikationsprincipen: hur blir det om vi *tar* hänsyn till ordningen?

Lösning

Med hänsyn till ordning. Första numret kan väljas på 35 sätt, andra på 34 och så vidare: $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ ordnade rader.

Utan hänsyn till ordning. Varje uppsättning av 7 nummer har räknats $7!$ gånger ovan, en gång per inbördes ordning. Dela bort det:

$$\binom{35}{7} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{6\,724\,520}$$

Samma resonemang för k nummer bland n ger Sats 2.1, se avsnitt 1 och 2 ovan.

På räknaren. `nCr(35,7)`.

Facit: 6 724 520.

≡ Lektion 1, övning 5 – Från lottoraden till Sats 2.1

Generalisera resonemanget i övning 4 så att det gäller för urval av k nummer bland n . Vad är viktigt i Sats 2.1? Varför definierar vi $\binom{n}{0} = 1$?

Lösning

Generalisering. Med hänsyn till ordning kan k nummer bland n väljas på $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ sätt – k faktorer, en per val, och varje val har ett alternativ färre än det förra eftersom vi inte lägger tillbaka. Varje oordnad uppsättning förekommer där $k!$ gånger, en gång per inbördes ordning. Alltså är antalet oordnade urval

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

vilket är Sats 2.1 (avsnitt 2 ovan).

Det viktiga i satsen är förutsättningarna: urvalet görs **utan återläggning** (annars blir det inte $n-1$ alternativ i andra valet) och **utan hänsyn till ordningen** (annars ska vi inte dela med $k!$).

Varför $\binom{n}{0} = 1$. Att välja noll element kan göras på precis ett sätt — att inte välja något.

Definitionen gör också att fakultetsformen fungerar utan undantag: $\frac{n!}{0! n!} = 1$ med $0! = 1$.

Resonemangsuppgift — det finns inget facit att jämföra med.

Se även

- [Multiplikationsprincipen](#)
- [Klassiska sannolikhetsdefinitionen](#)
- [Hypergeometrisk fördelning](#)
- [Binomialfördelning](#)

Resurser

- [Khan Academy: Counting, permutations, and combinations](#) [↗](#)
- [Wikipedia: Binomialkoefficient](#) [↗](#)