

Binomialfördelning

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Stokastisk variabel, Oberoende upprepningar

Binomialfördelningen räknar hur många av n oberoende försök som lyckas, när varje försök lyckas med samma sannolikhet p . Den är kursens vanligaste diskreta fördelning och grunden för både Poisson- och normalapproximationen.

1. Sannolikhetsfunktionen

Upprepa samma försök n gånger, **oberoende av varandra**, där varje försök antingen lyckas (sannolikhet p) eller misslyckas. Låt ξ vara **antalet lyckade försök**. Då är ξ binomialfördelad, $\xi \in \text{Bin}(n, p)$, med

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

De tre faktorerna säger var sin sak:

- p^k — de k försök som lyckas. Oberoende, alltså multiplicerat.
- $(1-p)^{n-k}$ — de $n-k$ som misslyckas.
- $\binom{n}{k}$ — antalet sätt att välja *vilka* av de n försöken som är de lyckade. Utan den räknar vi bara en enda specifik ordningsföljd.

Fyra villkor måste hålla

1. **Fixt n** — antalet försök bestäms i förväg, inte av utfallet.
2. **Två utfall** per försök — lyckat eller inte.
3. **Samma p** i alla försök.
4. **Oberoende** försök.

Faller något av dem är det inte en binomialfördelning. Dragning *utan* återläggning bryter mot både 3 och 4.

2. Väntevärde och varians

$$E(\xi) = np, \quad V(\xi) = np(1-p)$$

Båda följer direkt ur att ξ är en **summa av n oberoende Bernoullivariabler** $\xi = \eta_1 + \dots + \eta_n$, där varje η_i är 1 vid lyckat försök och 0 annars. Eftersom $E(\eta_i) = p$ och $V(\eta_i) = p(1-p)$ ger väntevärdets linjäritet och variansens additivitet vid oberoende resultatet med n termer.

Variansen är som störst vid $p = 1/2$ och krymper mot noll när p närmar sig 0 eller 1 — vilket är rimligt, för då är utfallet nästan givet på förhand.

≡ Exempel — exakt två sexor på fem tärningskast

Vi kastar en rättvis sexsidig tärning fem gånger. Vad är sannolikheten att exakt två av kasten ger en sexa?

Lösning

Setup. “Lyckat” = sexa, alltså $p = \frac{1}{6}$, $n = 5$, och vi söker $k = 2$. Kasterna är oberoende och p är densamma i alla, så $\xi \in \text{Bin}(5, \frac{1}{6})$.

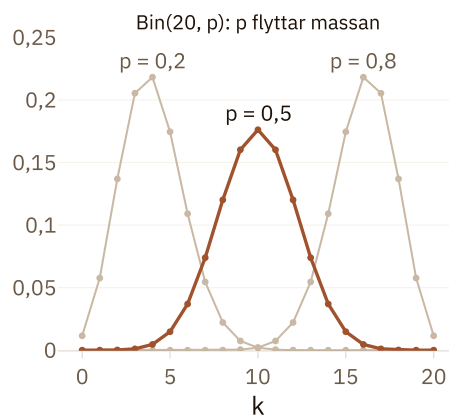
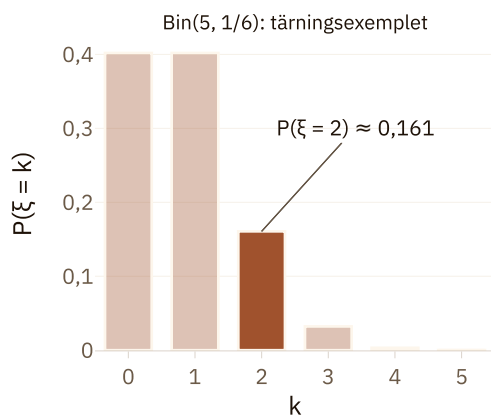
Räkningen.

$$P(\xi = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \boxed{\frac{625}{3888}} \approx 0,161$$

Rimlighetskontroll. Väntevärdet är $E(\xi) = 5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,83$ sexor. Två sexor ligger alltså över det förväntade men bara drygt en standardavvikelse bort, eftersom $\sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 0,83$. Att det landar på ungefär 16 % är därför rimligt — ovanligt, men långt ifrån osannolikt.

På räknaren. `binomPdf(5, 1/6, 2)`.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.



Till vänster syns tärningsexemplet: massan ligger vid $k = 0$ och $k = 1$, precis som väntevärdet $0,83$ antyder. Till höger flyttar p tyngdpunkten i sidled, och staplarna är som bredast vid $p = 1/2$ – samma sak som att variansen $np(1 - p)$ maximeras där.

3. Släktingar och gränsfall

Binomialfördelningen sitter mitt i ett nät av andra fördelningar, och det är ofta enklare att räkna med grannarna:

Situation	Vad som händer
$n = 1$	Fördelningen reduceras till en Bernoullifördelning $\text{Be}(p)$
$p \leq 0,1$ och $n \geq 10$	Poissonapproximation $\text{Po}(np)$
$np(1 - p) \geq 10$	Normalapproximation $N(np, \sqrt{np(1 - p)})$ – se normalfördelningen
Dragning utan återläggning	Hypergeometrisk fördelning i stället – försöken är inte oberoende

Beteckning

Kursen skriver $\xi \in \text{Bin}(n, p)$ med $\in$, som Vännman. I annan litteratur är $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ vanligare.

Varför normalapproximationen dyker upp

Eftersom ξ är en summa av många oberoende likafördelade termer är centrala gränsvärdessatsen tillämplig. Det är samma mekanism som gör normalfördelningen till standard svar överallt annars.

 Vanliga fel

- **Dragning utan återläggning är inte binomisk.** Ändras sannolikheten mellan försöken är det **hypergeometrisk fördelning**.
- **Glömma binomialkoefficienten.** $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; utan $\binom{n}{k}$ får man sannolikheten för en bestämd ordning.
- **Fel gräns i binomCdf.** `binomCdf(n, p, a, b)` ger $P(a \leq \xi \leq b)$ med båda gränserna inräknade; "fler än 3" börjar på 4.

4. Lösta lektionsuppgifter

Lektion 4, övning 1 och 3 – Samtidiga databassökningar

I ett rum står 5 datorer uppkopplade mot en server. Under 20 % av tiden gör var och en sökningar i en databas, oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att det vid en given tidpunkt pågår

a) exakt 2 sökningar samtidigt,

b) minst 2 sökningar samtidigt?

Vilken fördelning har ξ = antalet samtidiga sökningar, och med vilka parametrar?

Lösning

Modell. Fem oberoende datorer, var och en söker med sannolikheten 0,2. Antalet som söker är därför binomialfördelat: $\xi \in \text{Bin}(5, 0,2)$, med parametrarna $n = 5$ och $p = 0,2$.

a)

$$P(\xi = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 0,8^3 = 10 \cdot 0,04 \cdot 0,512 = \boxed{0,2048}$$

b) Via komplementet "högst 1":

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) = 1 - 0,8^5 - 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 1 - 0,32768 - 0,4096$$

På räknaren. `binomPdf(5,0.2,2)` respektive `binomCdf(5,0.2,2,5)`.

Facit: a) 0,2048, b) 0,2627; $\xi \in \text{Bin}(5, 0,2)$.

≡ Lektion 4, övning 10 – Slumpvandring

En partikel utför slumpvandring på heltalen: den startar på talet 0 och hoppar varje sekund ett steg, i negativ eller positiv riktning med sannolikheten 0,5 vardera. Vad är sannolikheten att partikeln efter 10 sekunder befinner sig på talet 2?

Lösning

Översätt till antal steg. Låt η = antal steg i positiv riktning av de 10. Positionen efter 10 steg är $\eta - (10 - \eta) = 2\eta - 10$. Att hamna på 2 betyder $2\eta - 10 = 2$, alltså $\eta = 6$.

Fördelning. Stegen är oberoende med samma sannolikhet 0,5 för positivt steg, så $\eta \in \text{Bin}(10, 0,5)$.

$$P(\eta = 6) = \binom{10}{6} 0,5^{10} = \frac{210}{1024} \approx \boxed{0,205}$$

Rimlighetskontroll. Paritet: efter ett jämnt antal steg står partikeln alltid på ett jämnt tal, så talet 2 är nåbart. Ett udda tal hade gett sannolikheten 0.

Facit: 0,205.

Se även

- Stokastisk variabel
- Hypergeometrisk fördelning
- Poissonfördelning
- Normalfördelning
- Talföljder och summor
- Mängdlära

Resurser

- [3Blue1Brown: Binomial distributions](#) — bygger upp fördelningen från grunden, med bra intuition för binomialkoefficienten
 - [Khan Academy: Binomial random variables](#)
 - [Wikipedia: Binomialfördelning](#)
-
-