

Betingad sannolikhet

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Sannolikhetsmått

Betingad sannolikhet är sannolikheten för en händelse givet att en annan redan har inträffat, $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$. Betingningen innebär att vi krymper utfallsrummet till det som är förenligt med den givna informationen.

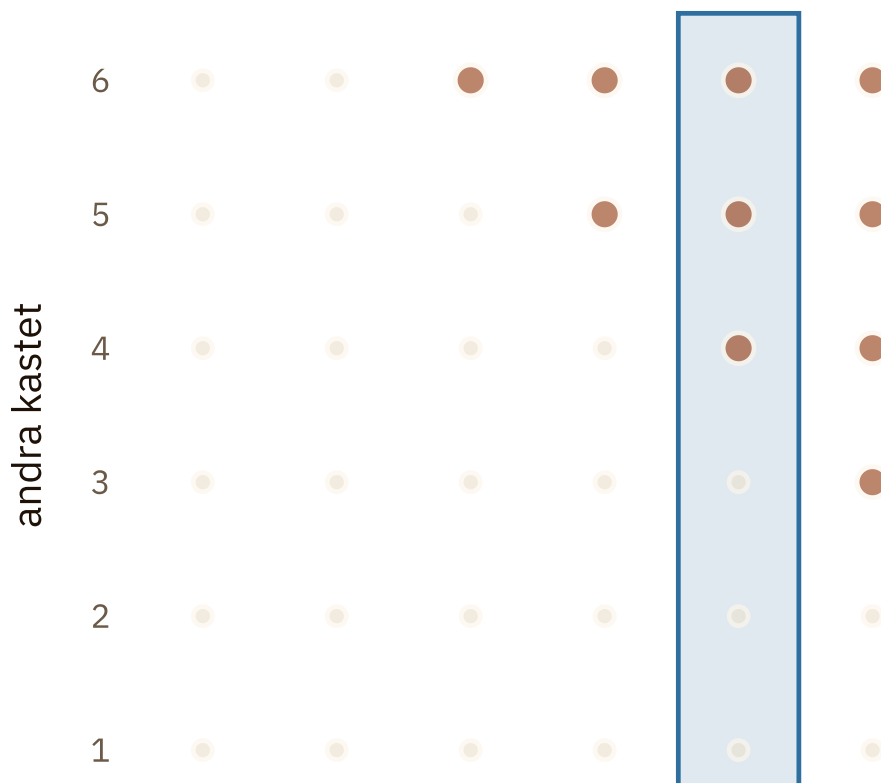
1. Att krympa utfallsrummet

Två personer kastar en tärning två gånger var. Låt A vara att tärningssumman blir större än 8 och B att första kastet blir 5. Av de 36 lika sannolika utfallen ger 10 händelsen A , så $P(A) = 10/36$.

Får vi veta att första kastet blev 5 är bara de 6 utfallen i B längre möjliga. Av dem ger 3 händelsen A , och sannolikheten blir $3/6$. Vi har räknat som om B vore hela **utfallsrummet**.

● A: summa > 8 (10 av 36)

■ B: första kastet 5 (3 av 6 ligger i A)



I **masstolkningen** blir samma sak

$$P(A \mid B) = \frac{\text{massan på den del av } A \text{ som ligger i } B}{\text{massan på } B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2. Definitionen

Definition 2.4. Med den **betingade sannolikheten** $P(A \mid B)$ för händelsen A givet händelsen B menas

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Förutsättning

Definitionen kräver $P(B) > 0$. Det går inte att betinga på något som aldrig inträffar.

$P(\cdot \mid B)$ uppfyller själv alla egenskaper hos ett sannolikhetsmått. Komplementregeln och additionssatsen gäller därför också betingat, till exempel $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.

⚠ $P(A \mid B)$ är **inte** $P(B \mid A)$

Täljaren är densamma, $P(A \cap B)$, men nämnarna skiljer sig. Sannolikheten att en skadad person är man är något helt annat än sannolikheten att en man skadas.

3. Multiplikationsformeln

Definitionen skriven baklänges ger snittets sannolikhet:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)$$

Den används när det är lätt att tänka sig försöket i två steg. Väljer vi två dosor ur en förpackning med 5, varav 3 har trasig knapp, är sannolikheten att den första fungerar $2/5$, och givet det är sannolikheten att även den andra fungerar $1/4$:

$$P(\text{båda fungerar}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1$$

Det är precis vad ett **träddiagram** gör: sannolikheterna längs en gren multipliceras, och varje sannolikhet efter första nivån är betingat på grenen fram till dit.

Med flera steg upprepas formeln och ger **Lagen om total sannolikhet** och **Bayes sats**.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ **Lektion 2, övning 4 och 5 (Vännman 2.18) – Malm från järnverket**

Vid ett järnverk tas prover på den inkommande malmen. Låt

A = Fe-halten är större än 66,5 %,

B = SiO₂-halten är mindre än 4,0 %.

Ur ett stort antal prover tar vi $P(A) = 0,32$, $P(B) = 0,54$ och $P(A \cap B) = 0,23$.

Övning 4. I ett nyligen analyserat prov vet vi att SiO_2 -halten är mindre än 4 %. Hur stor är då sannolikheten att Fe-halten är större än 66,5 %? Skriv sannolikheten med formell beteckning.

Övning 5. Bestäm den betingade sannolikheten för B givet A och jämför med övning 4.

Lösning

Övning 4. Vi vet att B har inträffat och söker $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,23}{0,54} \approx \boxed{0,43}$$

Övning 5. Nu är det A som är given:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,23}{0,32} \approx \boxed{0,72}$$

Jämförelse. Samma täljare, olika nämnare. Eftersom A är ovanligare än B blir $P(B \mid A)$ större: bland prover med hög Fe-halt har de flesta låg SiO_2 -halt, men bland prover med låg SiO_2 -halt är det färre än hälften som har hög Fe-halt. Båda är större än de obetingade $P(A) = 0,32$ och $P(B) = 0,54$, så de två egenskaperna tenderar att förekomma tillsammans.

Facit (övning 5): 0,72. Svar i boken (2:a uppl., 2.18): 0,43.

Lektion 2, övning 9 – Tomas två barn

Du stöter på en gammal bekant, Tomas, som berättar att han har två barn. När ni skiljs åt säger han: "Nu ska jag gå och hämta Anna på dagis." Vad är sannolikheten att Tomas andra barn är en pojke?

Lösning

Utfallsrum. De två barnens kön: $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$, där vi antar att vart och ett av de fyra utfallen har sannolikhet $1/4$.

Händelser. Vi vet att minst ett barn är en flicka: $A = \{FF, FP, PF\}$. Vi söker sannolikheten att det finns en pojke, alltså ett barn av vardera kön: $B = \{FP, PF\}$.



äldsta barnet först: F = flicka, P = pojke

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/4}{3/4} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Samma sak direkt ur utfallsrummet: av de tre utfall som är förenliga med informationen innehåller två en pojke.

Facit: 2/3. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 2, övning 10 – Bil-get-problemet

I ett TV-program får du välja en av tre dörrar. Bakom två står en get och bakom den tredje en bil, som blir din om du väljer rätt dörr. Du pekar på en dörr. Programledaren öppnar en av de två andra, och där står en get. Du erbjuds att byta dörr. Ska du byta?

 **Lösning**

Byt dörr.

Den som håller fast vid sitt första val vinner bara om den valde bildörren från början, vilket har sannolikheten $1/3$. Programledarens dörröppning ändrar inte på det.

Den som byter vinner om den från början valde en getdörr, vilket har sannolikheten $2/3$. Programledaren måste nämligen öppna den *andra* getdörren, så den kvarvarande stängda dörren döljer då bilen.

$$P(\text{vinst} \mid \text{byter}) = \frac{2}{3}, \quad P(\text{vinst} \mid \text{byter inte}) = \frac{1}{3}$$

Facit: byta dörr, med samma motivering.

Se även

- [Sannolikhetsmått](#)
- [Lagen om total sannolikhet](#)
- [Bayes sats](#)
- [Oberoende händelser](#)
- [Multiplikationsprincipen](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Bayes theorem, the geometry of changing beliefs](#) — betingning som att krympa området man tittar på
- [Khan Academy: Conditional probability](#)
- [Wikipedia: Betingad sannolikhet](#)