

Betingad fördelning och betingat väntevärde

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Marginalfördelning, Betingad sannolikhet

Den betingade fördelningen för ξ givet $\eta = y$ är fördelningen för ξ när vi vet värdet på η . Den fås genom att normera ett tvärsnitt av den simultana fördelningen, och dess väntevärde — det betingade väntevärdet — är den bästa prognosen för ξ givet informationen.

1. Ett tvärsnitt som normeras

Är två variabler beroende ger värdet på den ena ny information om vilka värden på den andra som är troliga — precis som för **betingade sannolikheter** mellan händelser. I en simultan tabell betyder “givet $\eta = y$ ” att vi bara tittar på kolumnen y . Kolumnens värden summerar till $p_\eta(y)$, inte till 1, så vi delar med kolumnsumman.

Definition 1.9 (kompendiet). Den **betingade fördelningen** för ξ givet $\eta = y$ ges i det diskreta fallet av sannolikhetsfunktionen

$$p_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)}$$

och i det kontinuerliga fallet av frekvensfunktionen

$$f_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$

Nämnamnaren är **marginalfördelningen** för den variabel vi betingar på.

Oberoende variabler

Är ξ och η oberoende är $p(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$, och den betingade fördelningen blir samma som marginalfördelningen för ξ . Informationen om η ändrar ingenting.

2. Betingat väntevärde

Definition 1.12 (kompendiet). Väntevärdet i den betingade fördelningen för ξ givet $\eta = y$ kallas det **betingade väntevärdet** och betecknas $E(\xi \mid \eta = y)$:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \sum_x x p_{\xi|\eta=y}(x) \quad \text{respektive} \quad E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta=y}(x) dx$$

På samma sätt får vi den betingade variansen och standardavvikelsen, som mäter hur osäkra vi fortfarande är om ξ när η är känd.

Bästa prognosen

Väntevärdet μ är den prognos c för ξ som minimerar det förväntade kvadratiska felet $E((\xi - c)^2)$ (beviset är kompendiets övning 1.12 nedan). På samma sätt är $E(\xi \mid \eta = y)$ den bästa prognosen för ξ **givet** att $\eta = y$, i minsta-kvadrat-mening.

3. Lagen om totalt väntevärde

Byter vi y mot η i $E(\xi \mid \eta = y)$ får vi en stokastisk variabel, $E(\xi \mid \eta) = g(\eta)$ där $g(y) = E(\xi \mid \eta = y)$.

Lagen om totalt väntevärde (kompendiet, sats 1.13).

$$E(\xi) = E(E(\xi \mid \eta))$$

Det är **lagen om total sannolikhet** för väntevärden: räkna väntevärdet fall för fall och väg ihop fallen. Satsen gäller oavsett om variablerna är diskreta, kontinuerliga eller en av varje.

När satsen används

När ξ är svår att beskriva direkt men blir enkel om vi vet värdet på η . Kommer η kunder till en affär och var och en köper mjölk med sannolikheten 0,2 är $E(\xi \mid \eta) = 0,2 \eta$, och satsen ger $E(\xi) = 0,2 E(\eta)$ utan att vi någonsin tar fram fördelningen för ξ .

Tillämpad på en indikatorvariabel för en händelse A blir satsen $P(A) = \int P(A \mid \eta = y) f_{\eta}(y) dy$, användbar när $P(A \mid \eta = y)$ är lätt att räkna.

4. Lösta lektionsuppgifter

Övningarna märkta *Kompendiet* kommer ur kompendiet om flerdimensionella fördelningar. Det saknar facit, så de är lösta två gånger oberoende av varandra.

≡ Lektion 17, övning 1b–f – Majas betyg givet Joels

Samma tabell som i **Marginalfördelning**: ξ = Joels betyg, η = Majas betyg, med

$x \backslash y$	3	4	5	$p_{\xi}(x)$
3	0,31	0,11	0,05	0,47
4	0,02	0,22	0,12	0,36
5	0,01	0,03	0,13	0,17
$p_{\eta}(y)$	0,34	0,36	0,30	

Utan villkor är $E(\eta) = 3,96$ och $\sigma_{\eta} = 0,799$.

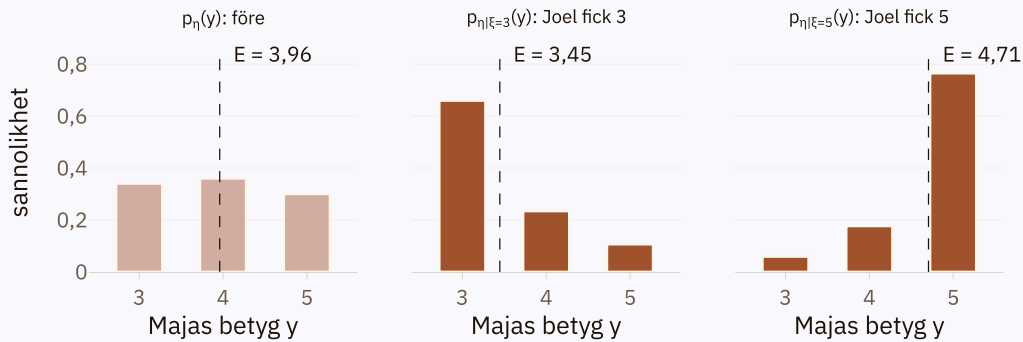
- Joel skriver tentan först och Maja får veta att han fick betyg 3. Beräkna den betingade fördelningen för Majas betyg.
- Skissa Majas fördelning före och efter beskedet. Vad har hänt med väntevärdet och spridningen?
- Beräkna väntevärde och standardavvikelse i den betingade fördelningen som kontroll.
- Vad hade hänt med väntevärdet och standardavvikelsen om Maja i stället fått veta att Joel fick en femma?
- Kontrollera förmodan i e) genom att räkna.

Lösning

b) Ta raden $x = 3$ och dela med radsumman $p_{\xi}(3) = 0,47$:

$$p_{\eta|\xi=3}(y) = \frac{0,31}{0,47}, \frac{0,11}{0,47}, \frac{0,05}{0,47} \approx \boxed{0,6596; 0,2340; 0,1064} \quad y = 3, 4, 5$$

c) Massan har flyttats mot trean och samlats där:



Väntevärdet har **minskat**, och eftersom massan nu är koncentrerad på ett värde har spridningen också **minskat**.

d)

$$E(\eta \mid \xi = 3) = 3 \cdot 0,6596 + 4 \cdot 0,2340 + 5 \cdot 0,1064 \approx \boxed{3,4468}$$

$E(\eta^2 \mid \xi = 3) \approx 12,340$, så $V(\eta \mid \xi = 3) \approx 12,340 - 3,4468^2 \approx 0,460$ och standardavvikelsen blir $\approx \boxed{0,6782}$.

e) Betygen samvarierar positivt, så en femma hos Joel bör flytta Majas fördelning uppåt: väntevärdet **ökar**. Massan bör samlas vid femman, så spridningen **minskar**.

f) Raden $x = 5$ delad med $p_{\xi}(5) = 0,17$:

$$p_{\eta|\xi=5}(y) \approx 0,0588; 0,1765; 0,7647$$

$$E(\eta \mid \xi = 5) \approx \boxed{4,7059}, \quad \sqrt{V(\eta \mid \xi = 5)} \approx \boxed{0,5703}$$

Förmodan stämmer.

På räknaren. One-Variable Statistics med betygen 3, 4, 5 som **X1 List** och radens sannolikheter, till exempel $\{0,31, 0,11, 0,05\}/0,47$, som **Frequency List**. $\bar{x}$ ger det betingade väntevärdet och σx den betingade standardavvikelsen.

Facit: b) 0,6596; 0,2340; 0,1064; c) minskat resp. minskat; d) 3,4468 resp. 0,6782; e) ökat resp. minskat; f) 4,7059 resp. 0,5703.

≡ Lektion 17, övning 2 – Total livslängd för batterier

I ett lager finns 25 batterier av typ a och 10 av typ b. Livslängderna är exponentialfördelade, och sannolikheten att ett batteri räcker mer än 100 drifttimmar är 0,95 för typ a och 0,97 för typ b. Vi väljer ut 10 batterier på måfå. Vad är väntevärdet av den totala livslängden för de 10 batterierna?

Tips: inför ξ = total livslängd för de 10 och η = antal batterier av typ a, och använd lagen om totalt väntevärde.

Lösning

Väntevärdena per typ. För en **exponentialfördelad** livslängd med parameter λ är $P(\text{livslängd} > t) = e^{-\lambda t}$ och väntevärdet $1/\lambda$. Ur $e^{-100\lambda} = p$ får vi $1/\lambda = 100/(-\ln p)$:

$$\mu_a = \frac{100}{-\ln 0,95} \approx 1949,6 \text{ h}, \quad \mu_b = \frac{100}{-\ln 0,97} \approx 3283,1 \text{ h}$$

Betingat på η . Givet att $\eta = y$ av de 10 är av typ a är resten, $10 - y$, av typ b:

$$E(\xi \mid \eta = y) = y \mu_a + (10 - y) \mu_b$$

Lagen om totalt väntevärde. η är antalet typ a vid dragning utan återläggning, $\eta \in \text{Hyp}(35, 10, 25/35)$ med $E(\eta) = 10 \cdot \frac{25}{35} \approx 7,143$. Eftersom $E(\xi \mid \eta)$ är linjär i η :

$$E(\xi) = E(\eta) \mu_a + (10 - E(\eta)) \mu_b \approx 7,143 \cdot 1949,6 + 2,857 \cdot 3283,1 \approx \boxed{23\,306 \text{ timmar}}$$

Facit: 23 305,75 timmar.

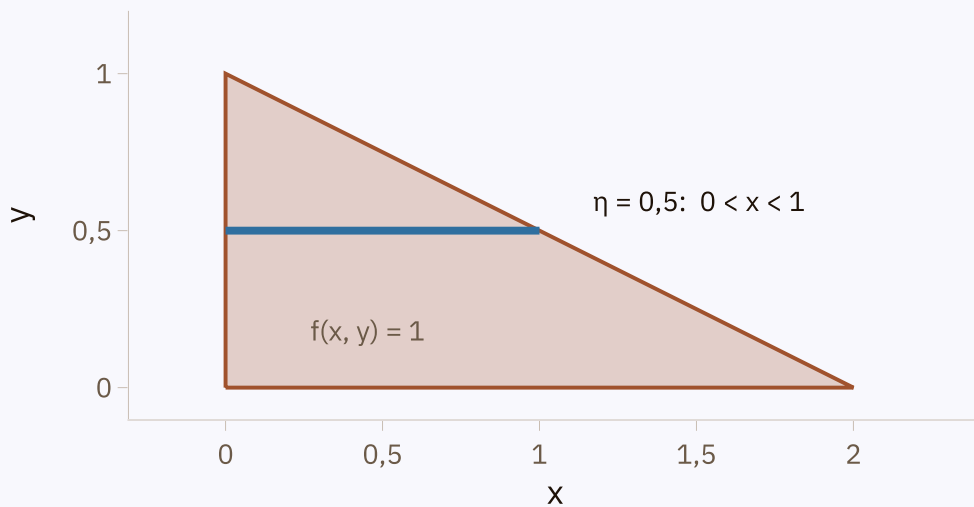
≡ Lektion 17, övning 4 – Likformig fördelning på en triangel

Antag att (ξ, η) är likformigt fördelad på triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(2, 0)$.

a) Diskutera utan beräkningar hur $f_{\xi}(x)$ borde se ut, och hur den betingade fördelningen för ξ givet $\eta = 0,5$ borde se ut.

b) Beräkna $f_{\xi}(x)$ och $f_{\xi|\eta=0,5}(x)$.

Lösning



a) Triangeln är hög vid $x = 0$ och smalnar av mot $x = 2$. Marginalen $f_{\xi}(x)$ borde därför också se ut som en triangel, störst vid 0 och noll vid 2. Givet $\eta = 0,5$ ligger punkten på den vågräta sträckan inuti triangeln, och eftersom den simultana fördelningen är likformig bör den betingade fördelningen vara likformig på den sträckan.

b) Triangelns area är $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$, så $f(x, y) = 1$ på triangeln. Den sneda sidan är $y = 1 - x/2$.

Marginalen. För $0 < x < 2$ går y från 0 till $1 - x/2$:

$$f_{\xi}(x) = \int_0^{1-x/2} 1 \, dy = \boxed{1 - \frac{x}{2}}, \quad 0 < x < 2$$

en triangel, som förutsagt.

Den betingade. För $0 < y < 1$ går x från 0 till $2(1 - y)$, så $f_{\eta}(y) = 2(1 - y)$ och $f_{\eta}(0,5) = 1$. Alltså

$$f_{\xi|\eta=0,5}(x) = \frac{f(x; 0,5)}{f_{\eta}(0,5)} = \boxed{1}, \quad 0 < x < 1$$

en rektangelfördelning på $(0, 1)$, likformig på sträckan $y = 0,5$ inuti triangeln.

Facit: $f_{\xi}(x)$ ser ut som en triangel, och den betingade fördelningen är likformig på den del av linjen $y = 0,5$ som ligger i triangeln. Facit ger bara formen; uttrycken är lösta två gånger oberoende av varandra och stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 1.10 – Tre diskreta variabler

Definitionen av en diskret tredimensionell fördelning är analog med det tvådimensionella fallet. Antag att (ξ, η, ζ) har sannolikhetsfunktionen $p(x, y, z)$.

- a) Ange uttryck för marginalfördelningarna för ξ , η och ζ .
- b) Ange ett uttryck för den betingade sannolikhetsfunktionen för ξ givet $\eta = y$, och för den betingade sannolikhetsfunktionen för ξ givet $\eta = y$ och $\zeta = z$.

Lösning

a) Summera bort de variabler vi inte är intresserade av:

$$p_{\xi}(x) = \sum_y \sum_z p(x, y, z), \quad p_{\eta}(y) = \sum_x \sum_z p(x, y, z), \quad p_{\zeta}(z) = \sum_x \sum_y p(x, y, z)$$

b) Som i det tvådimensionella fallet: simultan sannolikhet delad med sannolikheten för villkoret. Med ett villkor behöver täljaren den simultana fördelningen för (ξ, η) , där ζ är bortsummerad:

$$p_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{\sum_z p(x, y, z)}{p_{\eta}(y)}$$

Med två villkor är täljaren $p(x, y, z)$ själv, och nämnaren är den simultana marginalen för (η, ζ) :

$$p_{\xi|\eta=y, \zeta=z}(x) = \frac{p(x, y, z)}{\sum_{x'} p(x', y, z)}$$

Båda gäller för de y respektive (y, z) där nämnaren är positiv.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 1.11 — Betyget utan seminarier

Använd tabellen över tentamensbetyg ξ och antal seminarier η i [kompendiets övning 1.1](#). Beräkna väntevärdet av betyget för en student som inte har gått på något seminarium, och jämför med väntevärdet innan vi fick den informationen.

Lösning

Utan villkor. Radsummorna är $p_{\xi}(2), \dots, p_{\xi}(5) = 0,30; 0,35; 0,25; 0,10$, så

$$E(\xi) = 2 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,10 = 3,15$$

Givet $\eta = 0$. Kolumnen $y = 0$ har värdena 0,18; 0,11; 0,06; 0,02 med summan $p_{\eta}(0) = 0,37$. Den betingade fördelningen är kolumnen delad med 0,37:

$$p_{\xi|\eta=0}(x) \approx 0,486; 0,297; 0,162; 0,054 \quad x = 2, 3, 4, 5$$

$$E(\xi \mid \eta = 0) = \frac{2 \cdot 0,18 + 3 \cdot 0,11 + 4 \cdot 0,06 + 5 \cdot 0,02}{0,37} = \frac{1,03}{0,37} \approx \boxed{2,78}$$

Jämförelse. Det förväntade betyget sjunker från 3,15 till 2,78 när vi vet att studenten inte gått på något seminarium. Nästan hälften av de studenterna blir underkända. Det säger inget om orsaken: seminarierna kan hjälpa, men flitiga studenter kan också vara de som går dit.

På räknaren. One-Variable Statistics med $\{2, 3, 4, 5\}$ och **Frequency List**

$\{0,18, 0,11, 0,06, 0,02\} / 0,37$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Kompendiet, övning 1.12 – Väntevärdet är den bästa prognosen

Låt ξ vara en stokastisk variabel med väntevärdet μ . Visa att funktionen $f(c) = E((\xi - c)^2)$ antar sitt minsta värde då $c = \mu$.

Lösning

Utveckla kvadraten och använd att väntevärdet är linjärt och att c är en konstant:

$$f(c) = E(\xi^2 - 2c\xi + c^2) = E(\xi^2) - 2c\mu + c^2$$

Det är ett andragradspolynom i c med positiv c^2 -koefficient.

Kvadratkomplettera. Lägg till och dra ifrån μ^2 :

$$f(c) = \underbrace{E(\xi^2) - \mu^2}_{V(\xi)} + (c - \mu)^2$$

Första termen beror inte på c , och andra är ≥ 0 med likhet precis då $c = \mu$. Alltså antar f sitt minsta värde $\boxed{f(\mu) = V(\xi)}$ i $c = \mu$.

Tolkning. Variansen är det minsta förväntade kvadratiska fel som går att uppnå med en fast prognos. Gör vi samma räkning i den betingade fördelningen givet $\eta = y$ följer att $E(\xi \mid \eta = y)$ är den bästa prognosen när η är känd.

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

≡ Kompendiet, övning 1.13 (Vännman 2.25, i 2:a uppl. 2.24) – Livslängd för ett batteri ur centrallagret

Batterierna i **lektion 2, övning 6** kommer från fabrik A (50 %), B (20 %) och C (30 %). Ett batteri från A räcker mer än 100 drifttimmar med sannolikheten 0,95, från B med 0,97 och från C med 0,98. Antag att livslängderna är exponentialfördelade med parametrarna λ_A , λ_B och λ_C .

a) Beräkna λ_A , λ_B och λ_C .

b) Beräkna den förväntade livslängden för ett batteri som tas på måfå ur centrallagret.

Lösning

a) För $\xi \in \text{Exp}(\lambda)$ är $P(\xi > 100) = e^{-100\lambda}$. Sätt det lika med den givna sannolikheten och lös ut λ :

$$\lambda = \frac{-\ln p}{100} : \quad \lambda_A = \frac{-\ln 0,95}{100} \approx \boxed{5,13 \cdot 10^{-4}}, \quad \lambda_B \approx \boxed{3,05 \cdot 10^{-4}}, \quad \lambda_C \approx \boxed{2,02 \cdot 10^{-4}}$$

per timme. Väntevärdena $1/\lambda$ blir 1950, 3283 och 4950 timmar.

b) Låt η vara fabriken. Givet fabriken är den förväntade livslängden $1/\lambda$ för den fabriken, och lagen om totalt väntevärde väger ihop:

$$E(\xi) = 0,5 \cdot \frac{1}{\lambda_A} + 0,2 \cdot \frac{1}{\lambda_B} + 0,3 \cdot \frac{1}{\lambda_C} \approx 0,5 \cdot 1950 + 0,2 \cdot 3283 + 0,3 \cdot 4950 \approx \boxed{3116 \text{ tim}}$$

Fallgrop. Det är väntevärdena som ska vägas ihop, inte parametrarna. $1/(0,5\lambda_A + 0,2\lambda_B + 0,3\lambda_C) \approx 2646$ timmar är fel: blandningen av tre exponentialfördelningar är ingen exponentialfördelning.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Kompendiet, övning 1.14 – Summa med ett slumpmässigt antal termer

Antag att $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ är $R(0, 1)$ -fördelade och att $\eta \in \text{Po}(10)$ är oberoende av dem. Låt $\xi = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i$. Beräkna $E(\xi)$.

Lösning

Betinga på antalet termer. Givet $\eta = y$ är ξ en summa av y termer med väntevärdet $1/2$ vardera, och eftersom η är oberoende av termerna ändras inte deras fördelning av villkoret:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \frac{y}{2} \quad \implies \quad E(\xi \mid \eta) = \frac{\eta}{2}$$

Lagen om totalt väntevärde.

$$E(\xi) = E\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{E(\eta)}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$$

Samma resonemang som mjölkexemplet i avsnitt 3. Kompendiets eget exempel 1.14 har där ett tryckfel, $0,2 \cdot 0,4$ i stället för $0,2 \cdot 4$, men svaret 0,8 stämmer.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- Marginalfördelning
- Flerdimensionella fördelningar
- Betingad sannolikhet
- Lagen om total sannolikhet
- Väntevärde
- Tvådimensionell normalfördelning

Resurser

- [Wikipedia: Conditional probability distribution](#) 
- [Wikipedia: Law of total expectation](#) 