

Bayes sats

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Betingad sannolikhet, Lagen om total sannolikhet

Bayes sats vänder på en betingning: vet vi hur sannolik händelsen A är i varje fall B_i , kan vi räkna ut hur sannolikt varje fall är givet att A har inträffat. Nämnaren är lagen om total sannolikhet.

1. Satsen

Låt $B_1, \dots, B_n$ vara disjunkta och tillsammans utgöra hela utfallsrummet, och låt $P(A) > 0$. Då är

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A | B_j)}$$

2. Varför

Det är ingen ny idé, bara två kända formler efter varandra. Definitionen ger

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Täljaren skrivs om med multiplikationsformeln, $P(B_i \cap A) = P(B_i) P(A | B_i)$, och nämnaren med lagen om total sannolikhet.

I träd diagrammet

Täljaren är **en** gren som slutar i A . Nämnaren är **alla** grenar som slutar i A . $P(B_i | A)$ är alltså den andel av A -massan som kommer via gren i .

3. Det vi har och det vi söker

Uppgifter ger nästan alltid $P(A \mid B_i)$ – hur ofta en fabrik tillverkar defekta enheter, hur ofta ett tecken störs – men frågar efter $P(B_i \mid A)$: givet en defekt enhet, vilken fabrik kom den från?

⚠ Basfrekvensen avgör

Även om $P(A \mid B_i)$ är liten kan $P(B_i \mid A)$ bli stor om B_i är vanlig, och tvärtom. Att glömma faktorn $P(B_i)$ i täljaren är det vanligaste felet.

≡ Exempel – Ett positivt test för en ovanlig sjukdom

En sjukdom finns hos 1 % av befolkningen. Ett test ger positivt svar hos 95 % av de sjuka och hos 10 % av de friska. En slumpmässigt vald person testar positivt. Vad är sannolikheten att personen är sjuk?

✍ Lösning

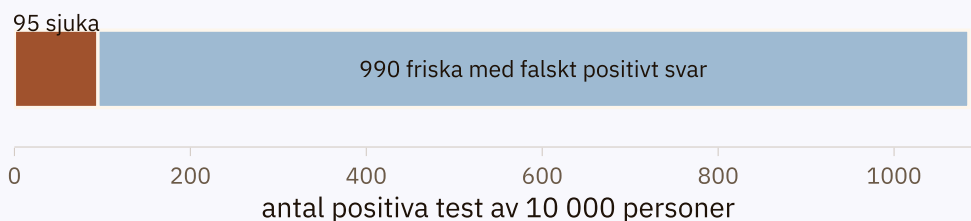
Beteckningar. S = personen är sjuk, $+$ = testet är positivt. Givet: $P(S) = 0,01$, $P(+ \mid S) = 0,95$, $P(+ \mid S^c) = 0,10$.

Bayes sats med fallen S och S^c :

$$P(S \mid +) = \frac{0,01 \cdot 0,95}{0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,10} = \frac{0,0095}{0,1085} \approx \boxed{0,088}$$

Tolkning med naturliga frekvenser. Tänk dig 10 000 personer: 100 är sjuka, och 95 av dem testar positivt. Av de 9900 friska testar 990 positivt. Bland de 1085 positiva är alltså bara 95 sjuka:

$$P(\text{sjuk} \mid +) = 95/1085 \approx 0,088$$



Testet är bra, men sjukdomen är så ovanlig att de falska positiva från den stora friska gruppen blir tio gånger fler än de sanna positiva.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 2, övning 6b (Vännman 2.25) — Vilken fabrik?

Fortsättning från **Lagen om total sannolikhet**: fabrik A , B och C står för 50 %, 20 % och 30 % av batterierna, och andelen som räcker mer än 100 drifttimmar är 95 %, 97 % och 98 %. Vi tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mer än 100 drifttimmar. Vad är sannolikheten att det är tillverkat i fabrik A ?

Lösning

Med H = batteriet räcker mer än 100 timmar gav lagen om total sannolikhet $P(H) = 0,963$. Bayes sats:

$$P(A \mid H) = \frac{P(A)P(H \mid A)}{P(H)} = \frac{0,50 \cdot 0,95}{0,963} = \frac{0,475}{0,963} \approx \boxed{0,49}$$

Rimlighetskontroll. Fabrik A gör hälften av batterierna men har den lägsta hållbarheten, så bland de hållbara batterierna bör andelen från A vara lite under 0,50. Det är den.

Svar i boken (2:a uppl., 2.24 = 3:e uppl. 2.25): 0,49.

≡ Lektion 2, övning 7 (Vännman 2.23) — Skador på en arbetsplats

På en arbetsplats skadades 1 % av personalen under ett år. 60 % av alla skadade var män. 30 % av de anställda var kvinnor. Är det de manliga eller de kvinnliga anställda som löper störst risk att råka ut för en skada enligt denna undersökning?

 Lösning

Beteckningar. S = personen skadas; M = personen är man; $K = M^c$ = personen är kvinna.

Givet. $P(S) = 0,01$, $P(M \mid S) = 0,60$, $P(K) = 0,30$, alltså $P(M) = 0,70$ och $P(K \mid S) = 0,40$.

Vi söker risken per kön, $P(S \mid M)$ och $P(S \mid K)$ – betingningen åt andra hållet mot det som är givet. Bayes sats, här med nämnaren $P(M)$ given direkt:

$$P(S \mid M) = \frac{P(S)P(M \mid S)}{P(M)} = \frac{0,01 \cdot 0,60}{0,70} \approx 0,0086$$

$$P(S \mid K) = \frac{P(S)P(K \mid S)}{P(K)} = \frac{0,01 \cdot 0,40}{0,30} \approx 0,0133$$

Svar. De kvinnliga anställda löper störst risk, trots att de flesta skadade är män. Männen är fler, och därför är de också fler bland de skadade.

Svar i boken (2:a uppl., 2.22 = 3:e uppl. 2.23): kvinnor.

≡ Lektion 2, övning 8a (Vännman 2.27) – Mottagen etta

Samma telekommunikationssystem som i **Lagen om total sannolikhet**: tecknet 1 skickas i proportion 0,6 och 0 i proportion 0,4; ett utsänt 0 mottas som 1 med sannolikhet 0,01 och ett utsänt 1 mottas som 0 med sannolikhet 0,02. Om 1 har mottagits, vad är den betingade sannolikheten att 1 har sänts?

 Lösning

Med S_0, S_1 = skickat 0 respektive 1 och M_1 = mottaget 1 ger lagen om total sannolikhet nämnaren:

$$P(M_1) = P(S_0)P(M_1 \mid S_0) + P(S_1)P(M_1 \mid S_1) = 0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,98 = 0,004 + 0,5$$

Bayes sats:

$$P(S_1 \mid M_1) = \frac{P(S_1)P(M_1 \mid S_1)}{P(M_1)} = \frac{0,588}{0,592} \approx \boxed{0,993}$$

I trädidiagrammet i [Lagen om total sannolikhet](#) är det grenen $S_1 \cap M_1$ delad med summan av de två grenar som slutar i M_1 .

Svar i boken (2:a uppl., 2.26 = 3:e uppl. 2.27): 0,993. Stämmer också med det handskrivna lösningsförslaget.

Se även

- [Betingad sannolikhet](#)
- [Lagen om total sannolikhet](#)
- [Sannolikhetsmått](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Bayes theorem, the geometry of changing beliefs](#) — bästa visuella förklaringen av varför basfrekvensen spelar roll
- [Wikipedia: Bayes sats](#)