Basbyte

Jun 12, 2026, 13 min read

#linjär-algebra #vektorrum #bas

---

1. Problemställningen

> 3B1B: Change of basis

I V4L3 M0067M såg vi att samma vektor $\vec{x}$ får **olika** koordinatvektorer beroende på vilken bas vi väljer. Det leder till en naturlig fråga:

> Om vi känner koordinaterna för $\vec{x}$ relativt **en** bas — hur beräknar vi koordinaterna relativt en **annan** bas?

Konkret: Givet två baser B och B' för ett vektorrum V, och koordinatvektorn $[\vec{x}]_B$. Hur hittar vi $[\vec{x}]_{B'}$?

> **Varför behövs detta?**
>
> Ibland är ett problem svårt att lösa i en viss bas men enkelt i en annan. Basbyte låter oss "byta perspektiv" — lösa problemet i den bekväma basen och sedan översätta tillbaka.
>
> **Analogi:** Tänk på att byta från kartesiska koordinater till polära koordinater. Samma punkt i planet, men olika siffror som beskriver den. Ibland är polära koordinater smidigare (t.ex. för cirklar).

---

2. Övergångsmatris — definition

Definition: Övergångsmatris

Låt $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ och $B' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\}$ vara två baser för ett vektorrum V.

Övergångsmatrisen (transition matrix) från B till B' är den unika $n \times n$-matris $P_{B \to B'}$ som uppfyller:

$$[\vec{x}]_{B'} = P_{B \to B'} \, [\vec{x}]_B$$

för alla $\vec{x} \in V$.

Med andra ord: övergångsmatrisen "översätter" koordinater i bas B till koordinater i bas B' genom en enkel matrismultiplikation.

Notationen $P_{B \to B'}$

Pilen visar **riktningen** på översättningen: från B-koordinater **till** B'-koordinater. Läs det som "övergångsmatrisen **från** B **till** B'".

Var noga med ordningen — $P_{B \to B'}$ och $P_{B' \to B}$ är **inte** samma matris!

---

3. Hur beräknar man övergångsmatrisen?

3.1 Metod: via kolumner

Övergångsmatrisen $P_{B \to B'}$ fås genom att uttrycka de **gamla** basvektorerna (B:s vektorer) i den **nya** basens (B':s) koordinater:

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} [\vec{b}_1]_{B'} & [\vec{b}_2]_{B'} & \cdots & [\vec{b}_n]_{B'} \end{bmatrix}$$

Varför? Om vi sätter $\vec{x} = \vec{b}_j$ (den j:te basvektorn i B), så ger $[\vec{b}_j]_B = \vec{e}_j$ (enhetsvektorn). Då:

$$[\vec{b}_j]_{B'} = P_{B \to B'} \, [\vec{b}_j]_B = P_{B \to B'} \, \vec{e}_j = \text{kolumn } j \text{ i } P_{B \to B'}$$

Minnesregel

Kolumn j i $P_{B \to B'}$ = koordinaterna för den j:te **gamla** (B) basvektorn uttryckt i den **nya** (B') basen.

3.2 Metod i $\mathbb{R}^n$: radreducering

I $\mathbb{R}^n$ finns en smidig beräkningsmetod. Bilda den utökade matrisen med B':s vektorer till vänster och B:s vektorer till höger, och radreducera:

$$\left[B' \mid B\right] \xrightarrow{\text{radreducera}} \left[I \mid P_{B \to B'}\right]$$

Varför fungerar detta? Vi löser n ekvationssystem samtidigt: för varje basvektor $\vec{b}_j$ i B söker vi koefficienter $c_1, \dots, c_n$ sådana att $c_1\vec{b}'_1 + \cdots + c_n\vec{b}'_n = \vec{b}_j$. Dessa koefficienter är precis $[\vec{b}_j]_{B'}$, dvs. kolumn j i $P_{B \to B'}$.

Räkneexempel: Övergångsmatris i $\mathbb{R}^2$ >

Räkneexempel: Övergångsmatris i $\mathbb{R}^3$ (möjlig tentauppgift) >

Räkneexempel: Mellan två icke-standardbaser >

---

4. Egenskaper hos övergångsmatrisen

Sats: Övergångsmatrisen är inverterbar

Övergångsmatrisen $P_{B \to B'}$ är alltid **inverterbar**, och dess invers är övergångsmatrisen i **motsatt riktning**:

$$(P_{B \to B'})^{-1} = P_{B' \to B}$$

Varför? Vi har: $[\vec{x}]_{B'} = P_{B \to B'} \, [\vec{x}]_B$

Multiplicera båda sidor med $(P_{B \to B'})^{-1}$: $[\vec{x}]_B = (P_{B \to B'})^{-1} \, [\vec{x}]_{B'}$

Men per definition gäller $[\vec{x}]_B = P_{B' \to B} \, [\vec{x}]_{B'}$. Alltså $P_{B' \to B} = (P_{B \to B'})^{-1}$. ∎

Praktisk konsekvens

Om du har beräknat $P_{B \to B'}$ behöver du **inte** göra om hela beräkningen för att gå åt andra hållet — invertera matrisen! Och om matrisen är 2×2 kan du använda formeln $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Sats: Kedja av basbyten

Om B, B' och B'' är tre baser för samma vektorrum, så gäller:

$$P_{B \to B''} = P_{B' \to B''} \cdot P_{B \to B'}$$

Man kan "kedja" övergångsmatriser genom matrismultiplikation.

Intuition: Först översätt från B till B', sedan från B' till B''. Sammansättningen ger direkt från B till B''.

---

5. Specialfall: basbyte via standardbasen

Om en av baserna är **standardbasen** $E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ förenklas beräkningarna avsevärt.

5.1 Från bas B till standardbasen

$$P_{B \to E} = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_n]$$

Det vill säga: övergångsmatrisen är helt enkelt matrisen med B:s basvektorer som kolumner!

Varför? I standardbasen är $[\vec{b}_j]_E = \vec{b}_j$ (koordinaterna **är** komponenterna).

5.2 Från standardbasen till bas B

$$P_{E\to B} = (P_{B\to E})^{-1} = [\vec{b}_1 \quad \cdots \quad \vec{b}_n]^{-1}$$

5.3 Mellan två baser via standardbasen

Vill du beräkna $P_{B\to B'}$ kan du gå **via** standardbasen:

$$P_{B\to B'} = P_{E\to B'} \cdot P_{B\to E} = (P_{B'\to E})^{-1} \cdot P_{B\to E}$$

Räkneexempel: Via standardbasen

---

6. Basbyte i andra vektorrum

Metoden fungerar inte bara i $\mathbb{R}^n$ — den gäller i **alla** ändligtdimensionella vektorrum. Nyckeln är att översätta till $\mathbb{R}^n$ via koordinater.

Basbyte i $\mathcal{P}_2$

---

7. Beslutsträd

Beräkna övergångsmatrisen $P_{B\to B'}$

```
flowchart TD
    A["Givet: baser B och B' för V"] --> B{"Arbetar vi i Rⁿ?"}
    B -- Ja --> C["Bilda [B' | B]\noch radreducera\ntill [I | P]"]
    B -- Nej --> D["Översätt B och B'\ntill koordinater i Rⁿ\n(via standardbase
    D --> C
    C --> E["P = P_{B→B'}"]
    E --> F{"Behöver du P_{B'→B}?"}
    F -- Ja --> G["P_{B'→B} = P⁻¹"]
    F -- Nej --> H["Klar!"]
```

Beräkna $[\vec{x}]_{B'}$ givet $[\vec{x}]_B$

```
flowchart TD
    A["Givet: [x]_B och baserna B, B'"] --> B["Beräkna P_{B→B'}\n(se ovan)"]
    B --> C["Matrismultiplicera:\n[x]_{B'} = P_{B→B'} · [x]_B"]
    C --> D["Svar: [x]_{B'}"]
```

---

8. Övningsuppgifter

Övergångsmatris-uppgifter

Uppgift 1: Övergångsmatris i $\mathbb{R}^2$ >

Uppgift 2: Mellan två icke-standardbaser >

Uppgift 3: Basbyte i $\mathcal{P}_1$ >

Inversuppgifter

Uppgift 4: Omvänd riktning >

Konceptuella uppgifter

Uppgift 5: Sant eller falskt?

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Change of basis (kap 13) — basbyte visuellt förklarat
- 3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors (kap 2) — grunden för baser och koordinater
- 3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues (kap 14) — egenvärden och basbyte hänger ihop

Wikipedia

- Change of basis
- Transition matrix
- Coordinate vector

Fördjupning

- Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Change of Basis