

Bas och koordinater

Jun 12, 2026, 17 min read

#linjär-algebra

#vektorrum

#bas

1. Vad är en bas?

[3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors](#) 

I [V4L2 M0067M](#) lärde vi oss två begrepp:

- **Span** — vilka vektorer kan vi nå?
- **Linjärt oberoende** — är vår vektormängd *effektiv* (inga onödiga)?

En **bas** kombinerar dessa två krav. Den är en vektormängd som är precis lagom stor: stor nog att nå allting, men utan överflödiga vektorer.

1.1 Definition

Definition: Bas

Låt W vara ett underrum till ett vektorrum V .

En mängd $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ är en **bas** för W om:

1. B är **linjärt oberoende**
2. B **spänner upp** W , dvs. $\text{span}(B) = W$

Intuition: En bas är den *minimala* uppsättningen vektorer som fortfarande kan bygga allt i rummet. Ta bort en vektor och du kan inte längre nå allt. Lägg till en och den är överflödig.

1.2 Geometrisk intuition

Rum	Bas behöver...	Exempel
En linje genom origo	1 vektor (i linjens riktning)	$\{(1, 2)\}$ för linjen $y = 2x$
\mathbb{R}^2	2 ej parallella vektorer	$\{(1, 0), (0, 1)\}$
Ett plan genom origo i \mathbb{R}^3	2 ej parallella vektorer i planet	$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ för xy -planet
\mathbb{R}^3	3 vektorer som inte ligger i samma plan	$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

2. Standardbaser

Varje "vanligt" vektorrum har en naturlig, enkel bas som kallas **standardbasen**.

2.1 Standardbas för \mathbb{R}^n

I \mathbb{R}^n är standardbasen:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

där \vec{e}_i har en etta i position i och nollor överallt annars.

☰ [Standardbasen för \$\mathbb{R}^2\$ och \$\mathbb{R}^3\$](#) >

2.2 Standardbas för \mathcal{P}_n

I polynomrummet \mathcal{P}_n (polynom med grad $\leq n$) är standardbasen:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

☰ [Standardbaser för polynomrum](#) >

2.3 Standardbas för $M_{m \times n}$

I matrisrummet $M_{m \times n}$ är standardbasen mängden av alla matriser med exakt en etta och resten nollor.

☰ [Standardbasen för \$M_{2 \times 2}\$](#) >

3. Är en given mängd en bas? – metod

För att kontrollera om $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ är en bas för ett rum med dimension n :

Steg-för-steg:

1. Skriv vektorerna som **kolumner** i en matris A
2. **Radreducera** till trappstegsform
3. Kontrollera:
 - Varje **kolumn** har en pivot \rightarrow linjärt oberoende ✓
 - Varje **rad** har en pivot \rightarrow spänner upp ✓
 - **Båda** gäller \rightarrow bas ✓

🔗 Genväg: räkna vektorer

Om du vet att rummet har dimension n och du har exakt n vektorer, räcker det att kontrollera **ett** av villkoren (oberoende ELLER spänner upp) – det andra följer automatiskt! Detta beror på att en $n \times n$ -matris har en pivot i varje kolumn *om och bara om* den har en pivot i varje rad.

☰ [Räkneexempel: Är tre polynom en bas för \$\mathcal{P}_2\$? \(möjlig tentauppgift\)](#) >

☰ [Räkneexempel: Två vektorer i \$\mathbb{R}^2\$](#) >

4. Unik representation – varför baser är så användbara

Den centrala anledningen till att baser är viktiga är att de ger oss ett **koordinatsystem**.

Sats: Unik representation

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ vara en **bas** för vektorrummet V .

För varje $\vec{x} \in V$ finns en **unik** uppsättning skalärer c_1, c_2, \dots, c_p sådana att

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_p\vec{b}_p$$

Varför? Beviset har två delar:

1. **Existens:** Eftersom B spänner upp V kan varje \vec{x} skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.
2. **Unikhet:** Antag att det finns *två* representationer: $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_p\vec{b}_p$ och $\vec{x} = d_1\vec{b}_1 + \dots + d_p\vec{b}_p$. Subtrahera: $(c_1 - d_1)\vec{b}_1 + \dots + (c_p - d_p)\vec{b}_p = \vec{0}$. Eftersom B är linjärt oberoende måste $c_i - d_i = 0$ för alla i , alltså $c_i = d_i$. Representationen var densamma! ■

Varför spelar det roll?

Utan unikheter hade koordinater varit meningslösa – samma vektor kunde ha olika "adresser". Unikheten garanterar att varje vektor har **exakt en** uppsättning koordinater relativt en given bas, precis som varje punkt på en karta har exakt en GPS-position.

5. Koordinater relativt en bas

| [3B1B: Change of basis](#)

5.1 Definition

Definition: Koordinatvektor

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ vara en bas för V och låt $\vec{x} \in V$.

Om $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_p\vec{b}_p$ kallas

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

koordinatvektorn för \vec{x} relativt basen B .

Med andra ord: koordinatvektorn talar om “hur mycket av varje basvektor” som behövs för att bygga \vec{x} .

Koordinater beror på basen!

Samma vektor \vec{x} får **olika** koordinater beroende på vilken bas man väljer. Basen fungerar som ett “perspektiv” – byt perspektiv och siffrorna ändras, men vektorn i sig är densamma.

5.2 Specialfall: standardbasen

Om B är standardbasen $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ för \mathbb{R}^n , så är koordinatvektorn identisk med själva vektorn:

$$[\vec{x}]_{\text{standard}} = \vec{x}$$

Det är därför vi “normalt” inte tänker på koordinater – vi jobbar redan i standardbasen utan att reflektera över det.

5.3 Exempel

≡ Koordinater i \mathbb{R}^2 : givet koordinatvektor, hitta \vec{x} >

≡ Koordinater i \mathbb{R}^2 : givet \vec{x} , hitta koordinatvektorn >

≡ Koordinater i \mathcal{P}_2 >

6. Räkne regler för koordinater

Koordinatvektorn bevarar de linjära operationerna – addition och skalärmultiplikation “fungerar likadant” i koordinater som i originalrummet.

 **Sats: Linjäritet hos koordinatavbildningen**

Låt B vara en bas för V och låt $\vec{u}, \vec{v} \in V, c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B \quad [c\vec{u}]_B = c[\vec{u}]_B$$

Varför? Om $\vec{u} = \sum a_i \vec{b}_i$ och $\vec{v} = \sum d_i \vec{b}_i$, så $\vec{u} + \vec{v} = \sum (a_i + d_i) \vec{b}_i$, och koordinatvektorn för summan är just summan av koordinatvektorerna.

 **Vad detta innebär**

Att lösa problem i ett “komplicerat” vektorrum (polynom, matriser, funktioner...) kan alltid **översättas** till att lösa motsvarande problem i \mathbb{R}^n via koordinater. Denna koppling kallas **isomorfi** – rummen “ser likadana ut” algebraiskt.

7. Koordinater bevarar linjärt oberoende

 **Sats: Oberoende bevaras av koordinatavbildningen**

Låt V vara ett vektorrum med bas $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$.

Då gäller för vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$:

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ linjärt oberoende i $V \iff$
 $\{[\vec{v}_1]_B, \dots, [\vec{v}_m]_B\}$ linjärt oberoende i \mathbb{R}^n

Bevis (\Leftarrow): Antag att koordinatvektorerna är linjärt oberoende i \mathbb{R}^n . Vi vill visa att originalvektorerna är oberoende i V .

Sätt $c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}$.

Ta koordinater relativt B på båda sidor och använd linjäriteten:

$$[c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m]_B = [\vec{0}]_B = c_1[\vec{v}_1]_B + \dots + c_m[\vec{v}_m]_B = \vec{0}$$

Eftersom koordinatvektorerna är linjärt oberoende: $c_1 = \dots = c_m = 0$. ■

(Den andra riktningen bevisas helt analogt.)

Praktisk konsekvens

Du behöver aldrig jobba direkt med polynom, matriser eller andra abstrakta vektorer när du vill kontrollera linjärt oberoende — översätt till koordinater i \mathbb{R}^n och radreducera som vanligt. Det är exakt vad vi har gjort i alla polynom- och matrisexempel hittills!

8. En kommentar om mängdnotation

Vi skriver baser med **mängdparenteser** $\{ \}$. Formellt innebär detta att:

- **Ordningen spelar ingen roll:** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{\vec{b}_2, \vec{b}_1\}$ som mängder
- **Inga dubletter:** $\{\vec{v}, \vec{v}\} = \{\vec{v}\}$

 **I praktiken spelar ordningen roll ändå!**

Även om mängdnotationen säger att ordning inte spelar roll, **beror koordinatvektorn på vilken ordning vi listar basvektorerna**. Om vi byter ordning på \vec{b}_1 och \vec{b}_2 i basen flippar vi koordinaterna:

$$[\vec{x}]_{\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{men} \quad [\vec{x}]_{\{\vec{b}_2, \vec{b}_1\}} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Därför bör man strikt sett använda **ordnade** mängder (tupler) för baser, men konventionen i de flesta läroböcker är att använda $\{ \}$ och underförstå att ordningen är given.

9. Beslutsträd

Är $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ en bas för V ?

flowchart TD

```

A["Givet:  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i  $V$  med  $\dim(V) = n$ "] --> B{"Har du rätt antal vektorer?"}
B -- "p ≠ n" --> NO["INTE EN BAS\np < n → kan inte spänna upp\np > n → kan inte spänna upp"]
B -- "p = n" --> C["Skriv vektorerna som kolumner\ni en n×n-matris och radreducera"]
C --> D{"Har varje kolumn en pivot?\n(ekvivalent: har varje rad en pivot?)"}
D -- Ja --> YES["BAS ✓\n• Linjärt oberoende ✓\n• Spänner upp V ✓"]
D -- Nej --> NO2["INTE EN BAS\nVektorerna är linjärt beroende\noch spänner inte upp V"]
  
```

Hitta koordinater $[\vec{x}]_B$

flowchart TD

```

A["Givet: bas  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  och vektor  $x \in V$ "] --> B["Sätt upp ekvationen  $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ "]
B --> C["Skriv som utökad matris\n $[b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \mid x]$ "]
C --> D["Radreducera till\nreducerad trappstegsform"]
D --> E["Läs av  $c_1, c_2, \dots, c_n$ \nfrån sista kolumnen"]
E --> F["Svaret:\n $[x]_B = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ "]
  
```

10. Övningsuppgifter

Bas-uppgifter

🔗 [Uppgift 1: Bas för \$\mathbb{R}^3\$? >](#)

🔗 [Uppgift 2: Bas för \$\mathcal{P}_2\$? >](#)

Koordinat-uppgifter

🔗 [Uppgift 3: Hitta koordinater i \$\mathbb{R}^2\$ >](#)

🔗 [Uppgift 4: Koordinater i polynomrum >](#)

🔗 [Uppgift 5: Från koordinater till vektor >](#)

Konceptuella uppgifter

🔗 [Uppgift 6: Sant eller falskt? \(med motivering\) >](#)

🔗 [Uppgift 7: Visa att koordinatavbildningen bevarar addition >](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) [↗] — vad en bas är och varför den behövs
- [3Blue1Brown: Change of basis \(kap 13\)](#) [↗] — koordinater relativt olika baser
- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces \(kap 16\)](#) [↗] — baser i abstrakta vektorrum

Wikipedia

- [Basis \(linear algebra\)](#) [↗]
- [Coordinate vector](#) [↗]
- [Standard basis](#) [↗]

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 6: The Vector Space](#) [↗]
 - [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension](#) [↗]
-